

Nouveaux programmes

xy¹

LES MATHÉMATIQUES EN 1^{ère} ANNÉE SECONDAIRE

Exercices - Devoirs / Corrigés
& Devoirs de contrôle et de synthèse

A. ABDESSAMAD - Inspecteur

R. TOUNSI - Professeur

R. BEN MAHFOUDH - Professeur



XY¹

LES MATHÉMATIQUES EN 1^{ère} ANNÉE SECONDAIRE

Exercices - Devoirs / Corrigés
& Devoirs de contrôle et de synthèse
par trimestre

A. ABDESSAMAD - Inspecteur

R. TOUNSI - Professeur

R. BEN MAHFOUDH - Professeur



Med Ali Editions

Collection : XY

Titre : Les mathématiques en 1 ère Année secondaire

Auteurs : Abdessamad Abdallah

Tounsi Riadh

Ben Mahfoudh Riadh

4ème Edition 2010

© Tous Droits Réservés

CAEU Med Ali ©

Rue Med Chaabouni Sfax 3027

Tel: +216/74407440 / Fax: +216/ 74407441

Email :edition.medali@tunet.tn

Site web: www.edition-medali.com

N° Editeur: 209-291/05

ISBN: 9973-33-109-5

ISSN 1737/6009

Avant-propos

Des exercices et des problèmes corrigés ! Pour qui ? Pour les bons élèves, les « forts en maths » ou pour les autres, les plus nombreux ! Ce manuel s'adresse à tous. Tous peuvent y trouver un guide qui leur permette de s'assurer qu'ils ont compris telle ou telle notion, qui leur propose une méthode (qui n'est pas unique en général), qui les aide à surmonter des difficultés particulières.

Mais chaque élève doit être convaincu qu'il ne progressera que s'il cherche lui-même à résoudre les activités et les exercices proposés dans ce livre.

Ce volume comprend trois parties réparties selon l'avancement du programme :

La première partie est appelée « Activités pour bien assimiler mon cours » elle comprend des exercices d'approches et applications directes des savoirs. Chaque activité est suivie d'un rappel de cours qui contient une définition ou une propriété ou les formules essentielles. Il est nécessaire que l'élève commence à élaborer ses activités pour passer à la deuxième partie appelée « Exercices (je maîtrise mes connaissances) » elle comprend des exercices de synthèse et des problèmes de réflexion et de recherche.

La troisième partie comprend les devoirs de contrôle ou de synthèse qui se présentent selon l'avancement du programme. Tous les exercices, les activités et les devoirs sont corrigés d'une manière détaillée, étape par étape afin d'assurer une meilleure compréhension.

Nous conseillons l'élève de ne consulter le corrigé qu'après avoir fourni des efforts personnels permettant de résoudre les problèmes. Il est nécessaire de comparer les réponses aux corrigés afin de se rendre compte des fautes commises et d'en saisir les causes.

Les auteurs

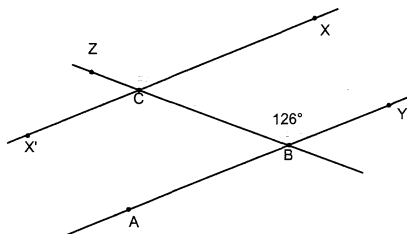
Les Angles

I. Activités pour bien assimiler mon cours

• Activité 1

(AY) et (XX') sont deux droites parallèles coupées par une sécante (BZ)
Déterminer la mesure des angles :

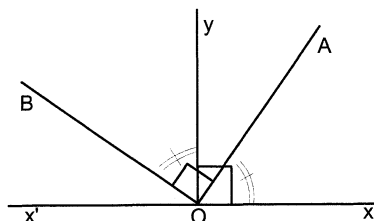
1. $\widehat{BCX'}$
2. \widehat{BCX}
3. \widehat{XCZ}



• Activité 2

Complétez

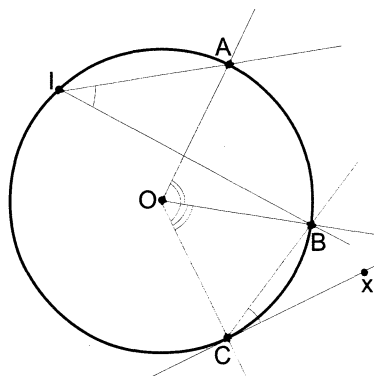
1. $\widehat{XOB} + \widehat{BOX'} = \dots\dots\dots$
2. $\widehat{XOA} + \widehat{AOY} = \dots\dots\dots$



• Activité 3

Compléter les phrases.

1. \widehat{AIB} est un angle
qui intercepte l'arc
2. \widehat{AOB} est un angle.....
qui intercepte l'arc.....
3. \widehat{XCB} est un angle.....
qui intercepte l'arc.....

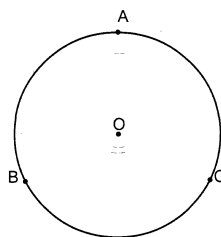


On rappelle que l'angle inscrit dans un cercle, est l'angle formé par deux cordes issues d'un même point de ce cercle.

L'angle au centre est l'angle de sommet le centre du cercle.

Dans la figure ci-contre \widehat{BAC} est un angle inscrit qui intercepte l'arc \widehat{BC} .

L'angle au centre \widehat{BOC} qui intercepte le même arc \widehat{BC} peut être saillant, plat ou rentrant suivant que la longueur de l'arc intercepté est inférieure ou supérieure à un demi-cercle.

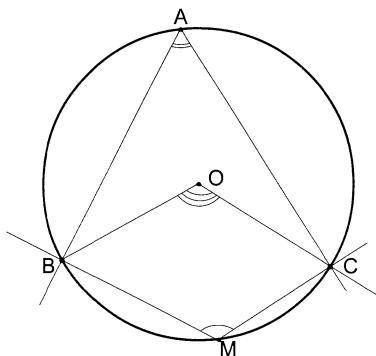


Activité 4

Soit un triangle équilatéral ABC inscrit dans un cercle de centre O.

M un point de l'arc \widehat{BC} qui ne contient pas A. Calculer

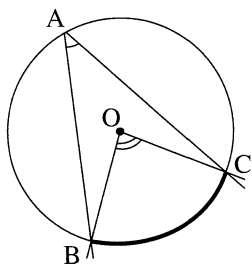
1. \widehat{BAC}
2. \widehat{BOC}
3. \widehat{BMC}



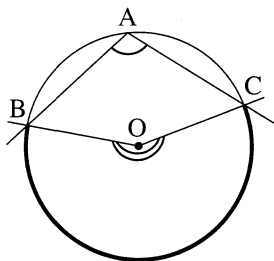
Théorème 1

Un angle inscrit dans un cercle est égal à la moitié de l'angle au centre associé qui intercepte le même arc.

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC}$$



\widehat{BAC} est un angle aigu

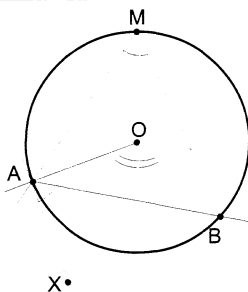


\widehat{BAC} est un angle obtus

Théorème 2

L'angle formé par une tangente et une corde issue du point de contact est égal à la moitié de l'angle au centre correspondant.

$$\widehat{XAB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$$

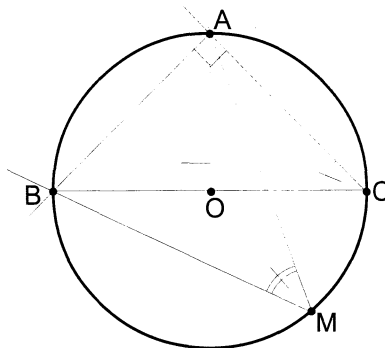


Activité 5

ABC un triangle isocèle rectangle en A inscrit dans un cercle de centre O.

Déterminer la mesure des angles suivants :

1. \widehat{ACB}
2. \widehat{AMB}



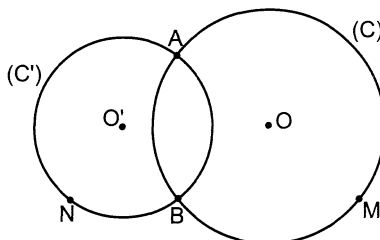
Deux angles aigus inscrits dans un même cercle qui interceptent le même arc sont égaux.

Activité 6

(C) et (C') sont deux cercles de centres respectifs O et O' qui se coupent en A et B.

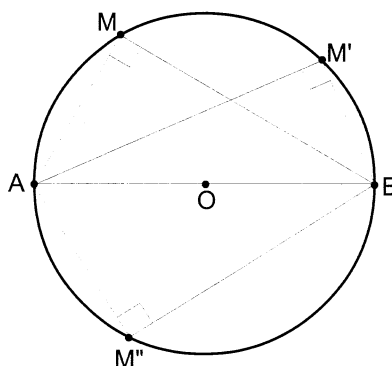
La perpendiculaire en B à (AB) recoupe (C) et (C') en M et N.

1. Montrer que les points A, O et M sont alignés.
2. Montrer que O' est le milieu du segment [AN].



On rappelle que :

- Si on joint un point d'un cercle aux extrémités d'un diamètre on obtient un triangle rectangle.
- Quand un côté d'un triangle est diamètre de son cercle circonscrit alors ce triangle est rectangle.
- A et B étant deux points donnés, l'ensemble des points M du plan tels que $\widehat{AMB} = 90^\circ$ est le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B



II. Corrigés des activités (bien assimiler mon cours)

• Activité 1

On rappelle que si deux droites sont parallèles coupées par une sécante alors elles déterminent deux angles alternes internes égaux, deux angles correspondants égaux et deux angles intérieurs d'un même côté supplémentaires.

1. les droites (XX') et (AY) sont parallèles coupées par la sécante (BZ) donc les angles $\widehat{BCX'}$ et \widehat{YBC} sont alternes internes égaux d'où $\widehat{BCX'} = \widehat{YBC}$ c'est-à-dire $\widehat{BCX'} = 126^\circ$.
2. Les angles \widehat{YBC} et \widehat{BCX} sont intérieurs d'un même côté donc ils sont supplémentaires d'où $\widehat{YBC} + \widehat{BCX} = 180^\circ$ c'est-à-dire $\widehat{BCX} = 180^\circ - 126^\circ = 54^\circ$.
3. Les angles \widehat{XCZ} et \widehat{YBC} sont correspondants d'où $\widehat{YBC} = \widehat{XCZ} = 126^\circ$

• Activité 2

1. $\widehat{XOB} + \widehat{BOX'} = 180^\circ$ (deux angles supplémentaires).
2. $\widehat{XOA} + \widehat{AOY} = 90^\circ$ (deux angles complémentaires).

• Activité 3

1. \widehat{AIB} est un angle inscrit qui intercepte l'arc \widehat{AB}
2. \widehat{AOB} est un angle au centre qui intercepte l'arc \widehat{AB}
3. \widehat{XCB} est un angle inscrit dont l'un des côtés une tangente qui intercepte l'arc \widehat{CB} .

- **Activité 4**

ABC est un triangle équilatéral donc $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 60^\circ$

1. $\widehat{BAC} = 60^\circ$
2. \widehat{BAC} est un angle inscrit qui intercepte l'arc \widehat{CB} . \widehat{BOC} est un angle au centre qui intercepte le même arc \widehat{CB} donc $\widehat{BOC} = 2 \times \widehat{BAC} = 120^\circ$
3. \widehat{BMC} est un angle obtus inscrit qui intercepte le même arc \widehat{CB} donc $\widehat{BMC} = 180^\circ - \widehat{BAC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

- **Activité 5**

1. ABC est un triangle rectangle isocèle en A donc $\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = 45^\circ$
2. \widehat{AOB} est un angle au centre qui intercepte l'arc \widehat{AB}
donc $\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{ACB} = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$
3. \widehat{AMB} est un angle inscrit qui intercepte le même arc \widehat{AB}
donc $\widehat{AMB} = \widehat{ACB} = 45^\circ$

- **Activité 6**

1. ABM est un triangle rectangle inscrit dans le cercle (C) donc l'hypoténuse [AM] est un diamètre de ce cercle d'où A, O et M sont alignés.
2. de la même façon [AN] est un diamètre de (C') donc le centre O' est le milieu du segment [AN].

III. Exercices (je maîtrise mes connaissances)

Exercice 1

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB < AC$ et de hauteur [AH] Soit D un point de [HC] tel que $HD = HB$.

1. Montrer que $\widehat{ABD} = \widehat{ADB}$
2. La perpendiculaire à (AC) passant par C coupe (AD) en K. Montrer que le triangle CDK est isocèle
3. Soit I milieu de [DC] et $F = S_I(K)$. Montrer que les droites (CK) et (DF) sont parallèles
4. Montrer que [DC] est la bissectrice de \widehat{FDK}

Exercice 2

Soit \mathcal{C} un cercle de diamètre $[AB]$ et de centre O , \mathcal{C}' un cercle de centre B et de rayon AB .

Une droite Δ passant par A distinct de (AB) recoupe \mathcal{C} en M et \mathcal{C}' en M' .

1. Montrer que les droites (OM) et (BM') sont parallèles.
2. En déduire que M est le milieu de $[AM']$.

Exercice 3

A B C un triangle tel que $\widehat{BAC} = 100^\circ$ et $\widehat{ABC} = 40^\circ$

1. Déterminer la nature du triangle ABC
2. Construire la demi-droite $[Bx)$ tel que $[BC)$ la bissectrice du secteur $[BA, Bx]$
3. Montrer que les droites (Bx) et (AC) sont parallèles.
4. Construire le cercle \mathcal{C} de centre O et circonscrit au triangle ABC.
5. Soit E le point diamétralement opposé à A sur \mathcal{C} . Calculer
 - a) \widehat{BOC}
 - b) \widehat{AEC}
 - c) \widehat{EOC}
 - d) \widehat{CBE}
6. La tangente à \mathcal{C} en C coupe (BE) en F . Calculer \widehat{BCF} et \widehat{BFC}

Exercice 4

1. Soit \mathcal{C} un cercle de centre I et de diamètre $[BC]$ et A un point de \mathcal{C} , la bissectrice de \widehat{ABC} coupe \mathcal{C} en E . Comparer \widehat{ACB} et \widehat{AIB} .
2. Soit Δ la droite passant par A et parallèle à (BE) . Δ coupe (BC) en D
 - a. Montrer que $\widehat{ADC} = \widehat{EBC}$
 - b. En déduire que le triangle ABD est isocèle.
3. La droite (AI) coupe \mathcal{C} en J . Sachant que $\widehat{ACB} = 40^\circ$, calculer
 - a) \widehat{ABE}
 - b) \widehat{AJB}
 - c) \widehat{BAJ}
 - d) \widehat{BIJ}

Exercice 5

ABC un triangle isocèle de sommet principal A, et \mathcal{C} le cercle circonscrit à ce triangle, M un point variable de l'arc \widehat{AC} qui ne contient pas B. On désigne par le point D projeté orthogonal du point B sur (AM). Les droites (BD) et (CM) se coupent en P.

1. Montrer que $\widehat{AMB} = \widehat{ABC}$
2. Montrer que \widehat{AMC} et \widehat{ABC} sont supplémentaires
3. En déduire que $\widehat{AMP} = \widehat{ABC}$
4. Montrer que (MD) est la bissectrice de l'angle \widehat{BMP}
5. Déduire que le triangle MPB est isocèle.
6. Que décrit le point D lorsque M varie sur \mathcal{C} ?

Exercice 6

Soit ABC un triangle isocèle en A. On désigne par H le projeté orthogonal de B sur (AC) et par \mathcal{C} le cercle de diamètre [BC].

Le cercle \mathcal{C} recoupe [AB] en K. On pose O le milieu de [BC].

1. Montrer que (CK) est la hauteur issue de \mathcal{C} dans le triangle ABC.
2. Comparer les angles \widehat{ABH} et \widehat{ACK} .
puis montrer que $\widehat{CBH} = \widehat{BCK}$.
3. Comparer les angles \widehat{BCK} et \widehat{BHK} .
En déduire que (BC) est parallèle à (HK).
4. Soit M un point de l'arc \widehat{BC} qui ne contient pas H et I le milieu de [BM].
 - a) Quelle la nature du triangle OBM ?
 - b) Sur quelle ligne fixe se déplace le point I quand M varie sur l'arc \widehat{BC} ?

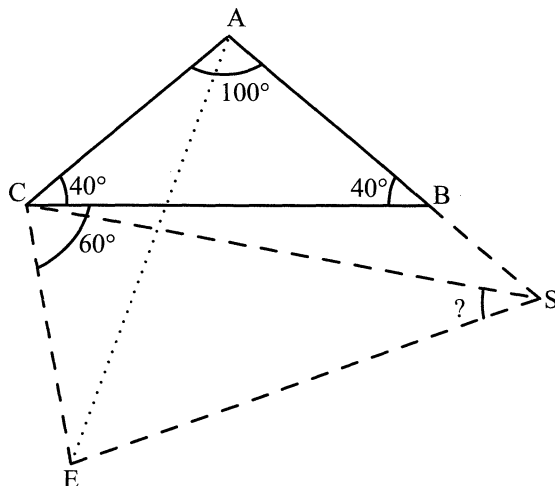
Exercice 7

On donne un triangle ABC non isocèle inscrit dans le cercle \mathcal{C} de centre O avec $\widehat{ABC} = 60^\circ$ et soit D le point de \mathcal{C} tel que [DC] soit un diamètre de \mathcal{C} et H le projeté orthogonal de C sur [AB]

1. Montrer que $\widehat{ACD} = \widehat{HCB}$
2. La tangente à \mathcal{C} en C et la tangente à \mathcal{C} en A se coupent en E.
Montrer que le triangle AEC est équilatéral.

Exercice 8

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A tel que $\widehat{BAC} = 100^\circ$. Soit S le point de $[AB]$ tel que $AS = BC$ et E le point tel que $CA = CE$ et $\widehat{BCE} = 60^\circ$. On suppose que E et A sont de part et d'autre de (BC) . Déterminer la valeur de l'angle \widehat{CSE} .



Exercice 9

Soit un cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon r et de diamètre $[AB]$, M est un point de ce cercle.

1. Construire le point Q tel que $MABQ$ soit un parallélogramme.
2. Comparer \widehat{QMB} et \widehat{MBA} puis \widehat{MOB} et \widehat{MAB} .
3. Soit I le milieu du segment $[MQ]$ et J le milieu de $[MB]$, montrer que $OBIM$ est un losange.
4. Sur quelle ligne fixe se déplace le point I lorsque M varie sur \mathcal{C} .
5. Sur quelle ligne fixe se déplace le point J lorsque M varie sur \mathcal{C} .

Exercice 10

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $\widehat{ABC} = 30^\circ$ et la bissectrice (Bx) de l'angle \widehat{ABC} . Soit D le projeté orthogonal de C sur (Bx) .

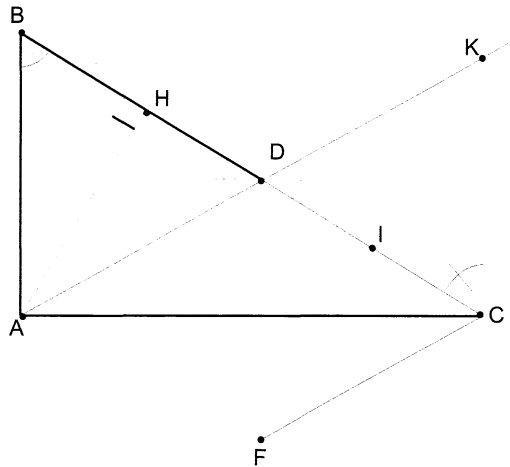
1. Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle \mathcal{C} .
2. On pose que les droites (AB) et (CD) se rencontrent en E , (BD) et (AC) se rencontrent en H . Montrer que les droites (EH) et (BC) sont perpendiculaires.
3.
 - a. Montrer que $\widehat{DBA} = \widehat{CAD}$.
 - b. Calculer \widehat{ACB} , \widehat{AHB} , \widehat{ACD} , et \widehat{DAC} .
 - c. Dédire que ADC est un triangle isocèle en D .

4. Soit I le milieu du segment $[BC]$, la parallèle à (AI) passant par B coupe (AC) en N .
 - a. Montrer que le triangle CBN est isocèle.
 - b. On suppose que B et C sont deux points fixes. Sur quelle ligne se déplace le point N lorsque A varie sur \mathcal{C} .

IV. Corrigés des exercices (je maîtrise mes connaissances)

Exercice 1

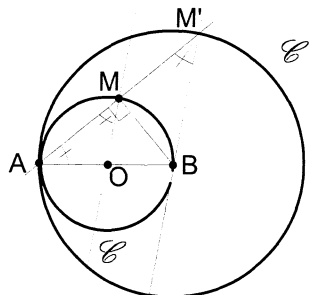
1. Par hypothèse on a :
les points B , H et D sont alignés et $BH = HD$ donc le point H est le milieu du segment $[BD]$. Puisque $[AH]$ est une hauteur du triangle ABC donc le triangle ABD est isocèle de sommet principal A d'où $\widehat{ADB} = \widehat{ABD}$ (1).



2. On a : les droites (AB) et (CK) sont parallèles d'où les angles \widehat{DCK} et \widehat{ABD} sont deux angles alternes internes déterminés par deux parallèles et une sécante d'où $\widehat{DCK} = \widehat{ABD}$. Les angles \widehat{CDK} et \widehat{ADB} sont opposés par le même sommet D d'où $\widehat{CDK} = \widehat{ADB}$ et d'après (1) on déduit que $\widehat{DCK} = \widehat{CDK}$ (2) c'est-à-dire que le triangle est isocèle en K .
3. I est un milieu commun des diagonales $[FK]$ et $[CD]$ d'où $CFDK$ est un parallélogramme donc les droites (CK) et (DF) sont parallèles.
4. $\widehat{DCK} = \widehat{CDF}$ (deux angles alternes internes déterminés par deux parallèles (CK) et (DF) et une sécante (CD)). Et d'après (2) on déduit que $\widehat{CDF} = \widehat{CDK}$ donc $[DC]$ est la bissectrice de l'angle \widehat{FDK} .

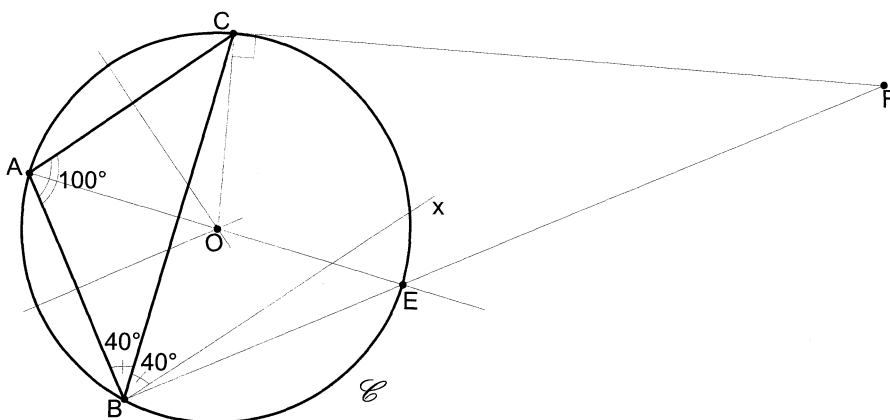
Exercice 2

1. Les triangles OAM et BAM' sont respectivement isocèles en O et B
donc $\widehat{OMA} = \widehat{OAM}$ et $\widehat{OAM} = \widehat{BM'A}$ or
 $\widehat{OAM} = \widehat{BAM}$ donc $\widehat{OMA} = \widehat{BM'A}$.
Les angles \widehat{OMA} et $\widehat{BM'A}$ sont correspondants égaux donc les droites qui les déterminent sont parallèles c'est-à-dire $(OM) \parallel (BM')$.



2. On a : $[AB]$ est un diamètre de \mathcal{C} et M un point de \mathcal{C} donc (BM) est perpendiculaire à (AM') et puisque le triangle BAM' est isocèle en B d'où (BM) porte la médiane issue de B ce qui donne que M est le milieu du segment $[AM']$.

Exercice 3



1. Dans le triangle ABC on a : $\widehat{ACB} = 180 - (\widehat{BAC} + \widehat{ABC})$
donc $\widehat{ACB} = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$ d'où le triangle ABC est isocèle en A .
2. (Voir figure)
3. On a : $\widehat{ABC} = \widehat{CBX}$ car $[BC]$ est la bissectrice de \widehat{ABX} d'autre part on a : $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ donc les angles alternes internes \widehat{CBX} et \widehat{ACB} sont égaux d'où les droites (BX) et (AC) sont parallèles.
4. Il faut construire les médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$ puis leur intersection O est le centre de \mathcal{C} .
5. a) \widehat{BOC} est l'angle au centre associé à l'angle inscrit \widehat{BEC} .
 \widehat{BOC} et \widehat{BEC} interceptent l'arc \widehat{BC} contenant A .
L'angle au centre associé à l'angle inscrit \widehat{BAC} est égal à $2 \times 100^\circ = 200^\circ$.
D'où $\widehat{BOC} = 360^\circ - 200^\circ = 160^\circ$

2^{ème} idée : On peut écrire $\widehat{BOC} = 2\widehat{BEC}$

or $\widehat{BEC} = \widehat{BEA} + \widehat{AEC} = \widehat{BCA} + \widehat{ABC}$ (angles inscrits qui interceptent le même arc)

et $\widehat{BCA} + \widehat{ABC} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$ (somme des angles dans le triangle ABC)

d'où $2\widehat{BEC} = 160^\circ$ et par suite $\widehat{BOC} = 160^\circ$

b) Les deux angles \widehat{AEC} et \widehat{ABC} sont inscrits dans le même cercle \mathcal{C} et interceptent le même arc \widehat{AC} donc $\widehat{AEC} = \widehat{ABC} = 40^\circ$.

c) Il faut chercher d'abord \widehat{EAC} . On a : ACE triangle rectangle en C car [AE] est un diamètre de \mathcal{C} donc $\widehat{EAC} = 90^\circ - \widehat{AEC} = 50^\circ$. \widehat{EOC} est un angle au centre qui intercepte l'arc \widehat{CE} et \widehat{EAC} est angle inscrit qui intercepte le même arc \widehat{CE} donc $\widehat{EOC} = 2\widehat{EAC} = 100^\circ$.

d) \widehat{CBE} est un angle inscrit qui intercepte l'arc \widehat{CE} donc $\widehat{CBE} = \frac{1}{2} \times \widehat{EOC} = 50^\circ$

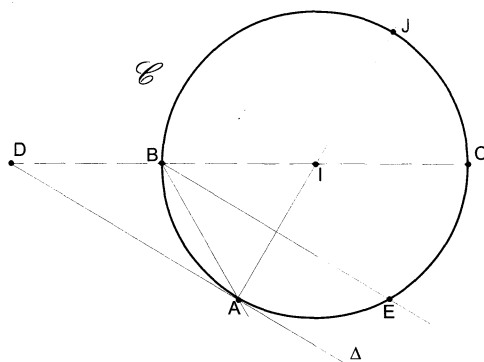
6. On a : $\widehat{BCF} = \widehat{BCO} + \widehat{OCF}$ or $\widehat{BCO} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{BOC}) = 10^\circ$

donc $\widehat{BCF} = 10^\circ + 90^\circ = 100^\circ$ car $(OC) \perp (CF)$

On a : $\widehat{BCF} + \widehat{BFC} + \widehat{CBF} = 180^\circ$

d'où $\widehat{BFC} = 180^\circ - (\widehat{CBF} + \widehat{BCF}) = 180^\circ - (100^\circ + 50^\circ) = 30^\circ$

Exercice 4



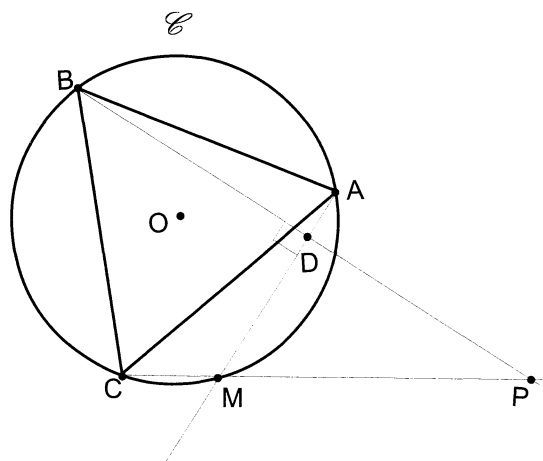
1. L'angle \widehat{ACB} est inscrit dans le cercle \mathcal{C} qui intercepte l'arc \widehat{AB} et l'angle \widehat{AIB} est un angle au centre qui intercepte le même arc \widehat{AB} donc

$$\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \widehat{AIB}$$

2. a) \widehat{ADC} et \widehat{EBC} sont deux angles correspondants déterminés par deux parallèles (BE), (AD) et la sécante (DC) donc ils sont égaux.

- b) On a : $\widehat{ABE} = \widehat{EBC}$ car $[BE]$ est la bissectrice de l'angle \widehat{ABC} ,
 $\widehat{EBC} = \widehat{ADB}$ d'après la question précédente. Donc $\widehat{ABE} = \widehat{ADB}$ de même
on a : $\widehat{DAB} = \widehat{ABE}$ (deux angles alternes internes déterminés par deux
parallèles (AD) , (BE) et la sécante (AB)) ce qui donne
 $\widehat{ADB} = \widehat{BAD}$ donc le triangle ABD est isocèle en B .
3. a) Il faut calculer d'abord \widehat{ABC} . Le triangle ABC est rectangle en A car $[BC]$
est un diamètre de \mathcal{C} donc $\widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{ACB} = 50^\circ$.
 $\widehat{ABE} = \frac{1}{2} \widehat{ABC} = 25^\circ$.
- b) $\widehat{AJB} = \widehat{ACB} = 40^\circ$ (deux angles inscrits qui interceptent le même arc \widehat{AB}).
- c) BAJ est un triangle rectangle en B (car $[AJ]$ est un diamètre de \mathcal{C}) donc
 $\widehat{BAJ} = 90^\circ - \widehat{AJB} = 90^\circ - \widehat{ACB} = 50^\circ$.
- d) $\widehat{BIJ} = 180^\circ - \widehat{AIB}$ or $\widehat{AIB} = 2 \times \widehat{ACB} = 80^\circ$ donc $\widehat{BIJ} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$

Exercice 5

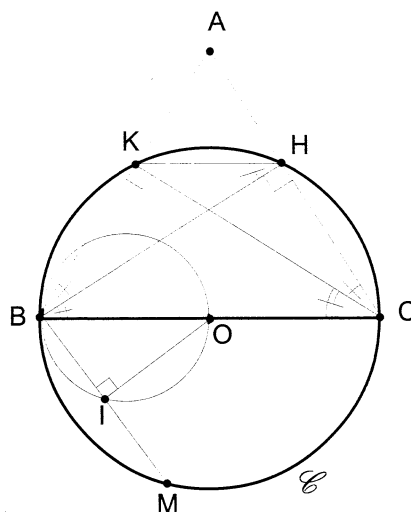


- Les angles \widehat{AMB} et \widehat{ACB} sont inscrits dans le cercle \mathcal{C} qui interceptent le
même arc \widehat{AB} donc $\widehat{AMB} = \widehat{ACB}$. Le triangle ABC est isocèle en A donc
 $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$ ce qui donne $\widehat{AMB} = \widehat{ABC}$.
- $\widehat{AMC} = \widehat{AMB} + \widehat{BMC} = \widehat{ACB} + \widehat{BAC}$
 $\widehat{AMC} = 180^\circ - \widehat{ABC}$
 $\widehat{AMC} + \widehat{ABC} = 180^\circ$
Donc les angles \widehat{AMC} et \widehat{ABC} sont supplémentaires.
- $\widehat{AMC} + \widehat{AMP} = 180^\circ$ et $\widehat{AMC} + \widehat{ABC} = 180^\circ$ donc $\widehat{AMP} = \widehat{ABC}$

4. on a : $\widehat{DMB} = \widehat{ACB}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$ donc $\widehat{DMB} = \widehat{DMP}$ c'est-à-dire que [MD] est la bissectrice du secteur \widehat{BMP} .
5. Les triangles DMB et PMD sont rectangles en D donc $\widehat{DMB} + \widehat{DBM} = \widehat{DPM} + \widehat{DMP}$ or $\widehat{DMB} = \widehat{DMP}$ donc $\widehat{DBM} = \widehat{DPM}$ et puisque les points B, D et P sont alignés alors $\widehat{PBM} = \widehat{BPM}$ d'où le triangle BMP est isocèle en M.
6. Pour tout M de \mathcal{C} le triangle ABD est rectangle en D d'où D décrit le cercle diamètre [AB] privé des points A et B.

Exercice 6

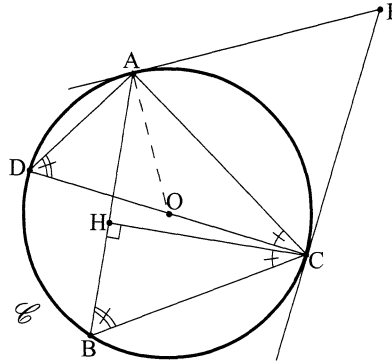
1. \mathcal{C} est un cercle de diamètre [BC] et K un point de ce cercle donc le triangle BCK est rectangle en K d'où (CK) est perpendiculaire à (AB) donc (CK) est la hauteur issue de C dans le triangle ABC.
2. \widehat{ABH} et \widehat{ACK} sont deux angles inscrits dans le cercle \mathcal{C} qui intercepte le même arc \widehat{HK} donc $\widehat{ABH} = \widehat{ACK}$. Les deux triangles CBK et BCH sont respectivement rectangles en K et H donc $\widehat{KBC} + \widehat{KCB} = \widehat{HCB} + \widehat{CBH}$ d'où $\widehat{KBH} + \widehat{HBC} + \widehat{KCB} = \widehat{HCK} + \widehat{KCB} + \widehat{HBC}$ d'où $\widehat{HBC} = \widehat{KCB}$



3. Les angles \widehat{BCK} et \widehat{BHK} sont inscrits dans le même cercle \mathcal{C} et interceptent le même arc \widehat{BK} donc $\widehat{BCK} = \widehat{BHK}$.
On a : $\widehat{BCK} = \widehat{HBC}$ d'après la question 2 et $\widehat{BCK} = \widehat{BHK}$ donc $\widehat{BHK} = \widehat{HBC}$ d'où les angles \widehat{KHB} et \widehat{HBC} sont alternes internes déterminés par les droites (KH), (BC) et la sécante (BH) sont égaux d'où les droites (KH) et (BC) sont parallèles.
4. OBM est un triangle isocèle en O car $OB = OM$ donc (OI) est perpendiculaire à (BM) c'est-à-dire que le triangle OIB est rectangle en I d'où le point I décrit le cercle de diamètre [OB].

Exercice 7

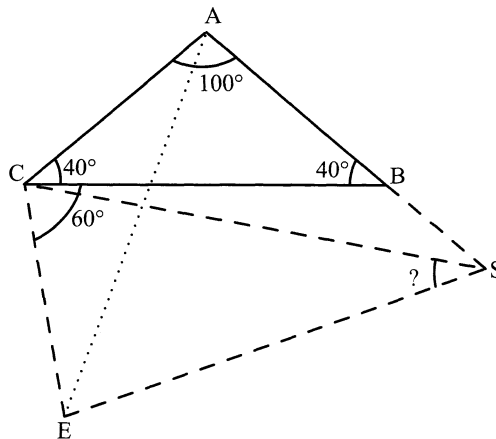
1. \widehat{ADC} et \widehat{ABC} sont deux angles inscrits dans \mathcal{C} qui interceptent le même arc \widehat{AC} donc $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$.
Les deux triangles ADC et BCH sont respectivement rectangles en A et en H, donc $\widehat{ADC} + \widehat{ACD} = 90^\circ$ et $\widehat{HBC} + \widehat{HCB} = 90^\circ$ d'où $\widehat{ACD} = \widehat{HCB}$
2. (AE) est une tangente à \mathcal{C} en A, donc $\widehat{EAC} = \widehat{ADC} = 60^\circ$ et on a :



(CE) tangente à \mathcal{C} en C donc $\widehat{CBA} = \widehat{ECA} = 60^\circ$ et par suite le triangle ACE équilatéral car il est isocèle en E et a un angle de mesure 60° .

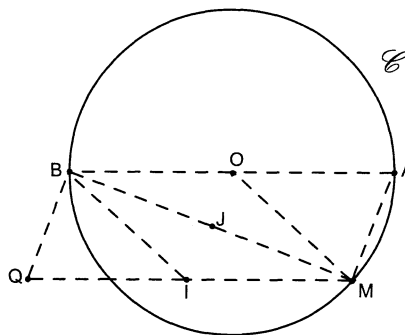
Exercise 8

Les deux triangles ABC et ACE sont isométriques d'après le 2^{ème} cas . D'où $AE = BC$ or $BC = AS$ par suite le triangle AES est isocèle ayant un angle de 60° donc il est équilatéral. On peut conclure que $\widehat{CSE} = 30^\circ$ car [SC) est la bissectrice de \widehat{ASE} .

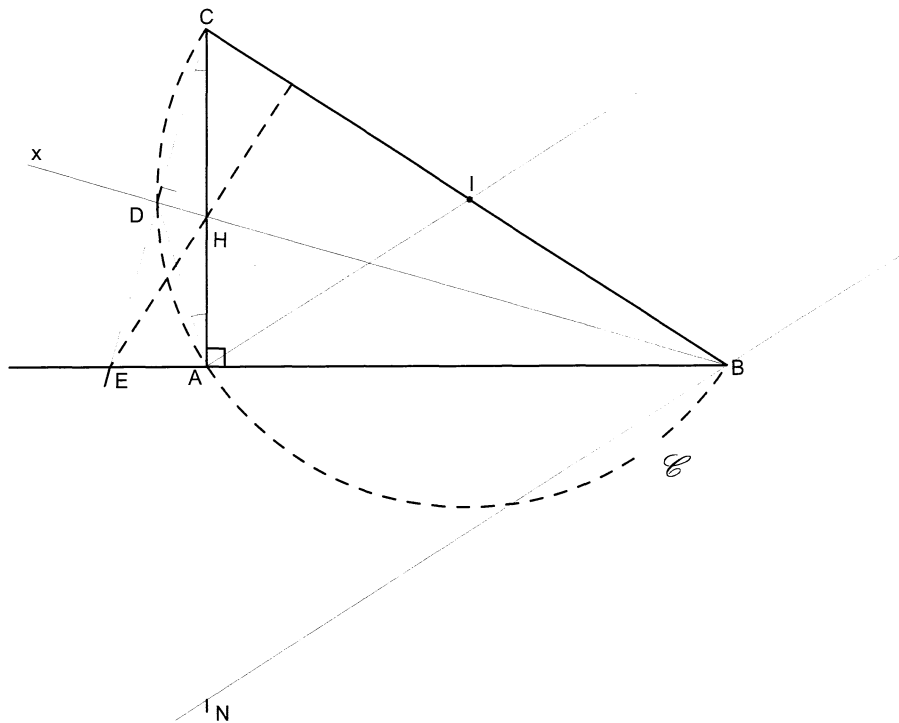


Exercise 9

1. Voir figure ci-contre.
2. \widehat{BMB} et \widehat{MBA} sont deux angles alternes internes déterminés par les deux parallèles (AB) et (MQ) et la sécante (BM) donc ils sont égaux. \widehat{MAB} est un angle inscrit dans le cercle \mathcal{C} qui intercepte l'arc \widehat{BM} , \widehat{MOB} est un angle au centre qui intercepte le même arc \widehat{BM} donc $\widehat{MOB} = 2\widehat{MAB}$.



- ## Exercise 10



- 19

2. Dans le triangle EBC on a : $(BD) \perp (EC)$ et $(AC) \perp (EB)$, donc (AC) et (BD) sont deux hauteurs de ce triangle et par suite H est l'orthocentre du triangle EBC . (EH) est l'hauteur du triangle EBC issue de E donc $(EH) \perp (BC)$.

3. a) $\widehat{DBA} = \widehat{DBC}$ car $[BD)$ est la bissectrice de \widehat{ABC} . \widehat{CAD} et \widehat{DBC} sont deux angles inscrits dans le cercle \mathcal{C} qui interceptent le même arc \widehat{DC} donc $\widehat{CAD} = \widehat{DBC}$ et par suite $\widehat{DBA} = \widehat{DAC}$
- b) ABC est un triangle rectangle en A donc $\widehat{ACB} = 90^\circ - \widehat{ABC} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ de même $\widehat{ABD} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.
 \widehat{ACD} et \widehat{ABD} sont deux angles inscrits qui interceptent le même arc \widehat{AD} donc $\widehat{ACD} = \widehat{ABD} = 60^\circ$. On a d'après la question précédente $\widehat{DAC} = \widehat{DBA} = 30^\circ$.
- c) On a : $\widehat{DAC} = \widehat{DCA} = 30^\circ$ d'où le triangle DAC est isocèle en D.
4. a) Dans le triangle CBN on a : I est le milieu de $[BC]$, $(AI) \parallel (BN)$ donc (IA) coupe $[CN]$ en son milieu d'où A est le milieu de $[CN]$ or $(AB) \perp (CN)$ d'où (BA) est la médiatrice du segment $[CN]$ et par suite $BC = BN$ donc CBN est un triangle isocèle en B
- b) De la question précédente on a : $BN = BC$ donc N décrit le cercle \mathcal{C} de centre B et de rayon BC.

Activités Numériques I

I. Activités pour bien assimiler mon cours

Activité 1 (Entier divisible par un autre)

1. Trouver tous les diviseurs de 8
2. Trouver tous les diviseurs de 12
3. Trouver tous les diviseurs de 34

**Un diviseur d'un entier a est un entier b qui divise a .
 b est un diviseur de a s'il existe un entier q tel que $a = b \times q$.**

Activité 2 (Critères de divisibilités)

1. Les nombres 725, 2365, 456 , 2360 sont ils divisibles par 2 ?
2. Les nombres 2365 ,123654 , 993312 , sont ils divisibles par 3?
3. Les nombres 236545 ,256420 , 23654 sont ils divisibles par 5?
4. Les nombres 236545 ,256420 , 23654 sont ils divisibles par 9?
5. Les nombres 23650,256420 , 23654 sont ils divisibles par 25?

Un nombre entier est divisible par 2 si le chiffre des unités est divisible par 2.

Un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Un nombre entier est divisible par 4 si le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 4.

Un nombre entier est divisible par 5 si le chiffre des unités est 0 ou 5.

Un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Un nombre entier est divisible par 25 si le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 25.

Activité 3 (Division euclidienne)

Effectuer la division euclidienne de a par b dans chacun des cas suivants :

- a) $a = 4598$ et $b = 4$
- b) $a = 45794$ et $b = 5$

Soient a et b deux entiers naturels tel que b non nul. Effectuer la division euclidienne de a par b c'est déterminer deux entiers q et r tel que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$.

a s'appelle le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste.

Si $r = 0$ la division est exacte donc $a = bq$ donc b est un diviseur de a . On dit aussi que a est un multiple de b .

Activité 4 (Plus grand commun diviseur de deux entiers)

1. Listes des diviseurs communs de $a = 84$ et $b = 56$
2. Trouver le PGCD(84, 56)

Parmi les diviseurs communs à a et b , l'un d'eux est plus grand que les autres. On l'appelle le Plus Grand Commun Diviseur.

On le note : PGCD ($a; b$)

Activité 5 (Recherche du PGCD à l'aide de l'Algorithme d'Euclide)

Trouver le PGCD de 646 et de 697

Activité 6 (Nombres premiers)

Un nombre différent de 1 est dit premier s'il n'est divisible que par 1 et par lui-même.

1. Donner la liste des 10 premiers nombres premiers.
2. 341 est-il un nombre premier ?
3. $(2^2)^3 - 1$ est-il un nombre premier?

Activité 7 (Nombres premiers entre eux.)

1. Déterminer le PGCD de 24 et 35.
2. 24 et 36 sont ils premiers entre eux.

Deux nombres sont dits premiers entre eux si leur PGCD vaut 1

Activité 8 (Fractions irréductibles)

1. Dire si les fractions suivantes sont irréductibles.

a) $\frac{7}{25}$, $\frac{49}{17}$

b) $\frac{48}{34}$; $\frac{646}{697}$

- Une fraction est dite irréductible si le PGCD de son numérateur et de son dénominateur vaut 1.

$\frac{a}{b}$ est irréductible si $\text{PGCD}(a;b) = 1$

- Si on simplifie une fraction par le PGCD de son numérateur et de son dénominateur, on obtient une fraction irréductible.

Si $\text{PGCD}(a;b)=c$, alors $\frac{a \div c}{b \div c}$ est irréductible

Activité 9

Trouver le plus petit commun multiple des nombres entiers 25 et 10

Soit a et b deux entiers naturels .On désigne par M_a l'ensemble des multiples de a et M_b l'ensemble des multiples de b . Le plus petit élément de $M_a \cap M_b$ est le plus petit commun multiple de a et b on le note par $\text{PPCM}(a,b)$

II. Corrigés des activités (bien assimiler mon cours)

Activité 1

1. Si on désigne par D_8 l'ensemble des diviseurs de 8 on aura donc

$$D_8 = \{1 ; 2 , 4 ; 8\}$$

2. $D_{12} = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12\}$

3. $D_{34} = \{1 ; 2 ; 17 ; 34 \}$

Activité 2

1. Le chiffre des unités de 725 est 5 différent de 0 et non divisible par 2 donc 725 est non divisible par 2 ; même réponse pour 2365, 456 et 2360 sont divisibles par 2
2. La somme des chiffres de 2365 est 16 non divisible par 3 donc 2365 non divisibles par 3 . La somme des chiffres de 123 654 est 21 qui est divisible par 3 donc 123 654 est divisible par 3. etc....
3. Les entiers 236545 ; 256420 sont divisibles par 5 les chiffres des unités est 0 ou 5 mais 23654 est non divisible par 5.
4. aucun des nombres 236545 ; 256420 ; 23654 est divisible par 9 car la somme de leurs chiffres est non divisible par 9.
5. Uniquement 23650 est divisible par 25 car le nombre formé par les deux derniers chiffres est 50 divisible par 25.

Activité 3

1. $4598 = 4 \times 1149$ le quotient de cette division est 1149 le reste est 0 (cette division est exacte) 4 est un diviseur de 4598.
2. $45794 = 5 \times 9158 + 4$ le quotient de cette division est 9158 le reste est 4. (cette division est inexacte) 5 n'est pas un diviseur de 45794.

Activité 4

1. $D_{84} = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; 12 ; 14 ; 21 ; 28 ; 42 ; 84\}.$
 $D_{56} = \{1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 8 ; 14 ; 28 ; 56\}.$
2. PGCD (84, 56) est le plus grand élément de $D_{84} \cap D_{56}$ donc
PGCD (84, 56) = 28

Activité 5

Pour trouver le PGCD de deux nombres, on peut appliquer la méthode illustrée par l'exemple suivant :

Trouver le PGCD de 646 et de 697 :

On pose la division de 697 (le plus grand) par 646 :

Donc **$697 = 646 \times 1 + 51$**

On pose la division de 646 (diviseur précédent) par 51 (reste précédent)

Donc **$646 = 51 \times 12 + 34$** , et donc **$697 = (51 \times 12 + 34) \times 1 + 51 = 51 \times 13 + 34 \cdot 1$** .

On pose la division de 51 (diviseur précédent) par 34 (reste précédent)

Donc **$51 = 34 \times 1 + 17$** , donc **$646 = (34 \times 1 + 17) \times 12 + 34 = 34 \times 13 + 17 \times 12$** et

$697 = (34 \times 1 + 17) \times 13 + 34 \times 1 = 34 \times 14 + 17 \cdot 13$.

On pose la division de 34 (diviseur précédent) par 17 (reste précédent)

Donc **$34 = 17 \times 2 + 0$** , donc **$646 = 17 \times 2 \times 13 + 17 \times 12 = 17 \times 38$** et.

$697 = 17 \times 2 \times 14 + 17 \times 13 = 17 \times 41$

Le reste étant égale à 0 on a fini, et le PGCD est le dernier diviseur (ici 17).

(Les divisions de 646 par 17 et de 697 par 17 tombent justes).

La démonstration d'une partie de la validité de l'algorithme sur l'exemple :

17 est le plus grand diviseur de 17, donc 17 est le PGCD de 34 et 17

Si a est diviseur de b et de c, il est aussi diviseur de b+c, et de ub+vc

17 est donc diviseur de 34 et de 51 (car $51=2\times 17+17$)

17 est donc diviseur de 51 et de 646 (car $646=3\times 17\times 12+2\times 17$)

17 est donc diviseur de 697 et de 646.

Activité 6

1. Les dix premiers nombres premiers sont 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29
2. $341 = 31\times 11$ donc il est divisible par 11 et par 31 d'où il n'est pas premier.
3. $(2^2)^3 - 1 = 63$ est divisible par 3 donc $(2^2)^3 - 1$ n'est pas premier.

Activité 7

1. $24 = 2^3 \times 3$; $35 = 5 \times 7$ Donc PGCD (24,35) = 1.
2. 24 et 35 sont premiers entre eux car leur PGCD est 1

Activité 8

- a) Le PGCD (7, 25) = 1 donc $\frac{7}{25}$ est irréductible de même pour 49 et 17 ;

$\frac{49}{17}$ est irréductible.

- b) $\frac{48}{34} = \frac{28 \times 2}{17 \times 2} = \frac{28}{17}$ donc $\frac{48}{34}$ est réductible. ; $\frac{646}{697} = \frac{38 \times 17}{41 \times 17} = \frac{38}{41}$ donc

$\frac{646}{697}$ est réductible.

Activité 9

$M_{25} = \{0, 25 ; 50 ; 75 \dots\dots\dots\}$

$M_{10} = \{0, 10 ; 20 ; 30 ; 40 ; 50 ; 60 \dots\dots\}$

donc le plus petit élément commun de M_{25} et M_{10} est 50

d'où PPCM (25,10) = 50.

III. Exercices (je maîtrise mes connaissances)

Exercice 1

Poser et effectuer les divisions euclidiennes suivantes en rédigeant comme dans l'exemple suivant :

$$\begin{array}{r|l} 1492 & 88 \\ 612 & 16 \\ 84 & \end{array}$$

« Donc $1492=88\times 16+84$.Le diviseur est 88, le quotient 16 et le reste 84. »

- a. $643\div 23$
- b. $751\div 12$
- c. $1596\div 435$
- d. $2593\div 47$
- e. $487\div 65$

Exercice 2

On donne $a = 726$ et $b = 321$

1. Décomposer en produits de facteurs premiers les nombres a et b
2. Trouver les ensembles suivants : D_a ensemble des diviseurs de a ;
 D_b ensemble des diviseurs de b ;
Déterminer le PGCD (a, b) plus grand commun diviseur.
3. Peut-on trouver le PGCD (a, b) par une autre méthode.
4. Déterminer le PPCM (a, b) plus petit commun multiple.
5. donner une écriture irréductible de $x = \frac{a}{b}$

Exercice 3

- a) Effectuer la division euclidienne de 5274 par 3492. Quelle relation peut-on écrire ?
- b) Effectuer la division euclidienne de 3492 par le reste de la division précédente. Quelle relation peut-on écrire ?
- c) Effectuer la division euclidienne du diviseur précédent (celui du b) par le reste précédent (celui du b). Quelle relation peut-on écrire ?
- d) Effectuer la division euclidienne du diviseur précédent (celui du c) par le reste précédent (celui du c). Quelle relation peut-on écrire ?
- e) Effectuer la division euclidienne du diviseur précédent (celui du d) par le reste précédent (celui du d). Quelle relation peut-on écrire ?
- f) Effectuer la division euclidienne du diviseur précédent (celui du e) par le reste précédent (celui du e). Quelle relation peut-on écrire ?
- g) Diviser 5274 et 3492 par 18. Que constatez-vous ?

Exercice 4

Ecrire sous forme $a.10^n$, a étant un entier naturel relatif et n un entier relatif.

170000 ; 0,00000203 ; -12,5000000 ; $\frac{42}{1000000}$; $\frac{47}{40}$; $\frac{23}{80}$

Exercice 5

Soit un entier naturel n .

1. On désigne par $x = 8n + 13$ et $y = 44n + 207$. déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de x et y par 4.
2. Montrer que $x + y$ n'est pas premier.

Exercice 6

Soit n un entier naturel non nul et différent de 1

1. dire pourquoi $n^3 - n$ est un entier naturel
2. $n^3 - n$ est-il premier ?
3. Trouver trois diviseurs de $n^3 - n$

Exercice 7

1. Montrer que le carré d'un entier pair est divisible par 4.
2. Soit n un entier impair, montrer que n^2 n'est pas divisible par 4.
3. a) Vérifier que pour tout entier naturel $n > 2$ on a : $\frac{4n}{n-2} = 4 + \frac{8}{n-2}$
b) Comment faut-il choisir l'entier naturel n pour que $\frac{4n}{n-2} \in \mathbb{N}$?
- 4) a) Vérifier que pour tout entier naturel $n > 2$ on a : $\frac{4n-16}{n-2} = 4 - \frac{8}{n-2}$
b) comment faut-il choisir l'entier naturel n pour que $\frac{4n-16}{n-2} \in \mathbb{N}$?
- 5) a) Choisir cinq multiples consécutifs de 5 et vérifier que leur somme est divisible par 25
b) Généraliser.

Exercice 8

1. Déterminer PGCD (18 ; 30).
2. Déterminer la liste :
 - a) Des six premiers multiples positifs de 18.
 - b) Des quatre premiers multiples positifs de 30.
 - c) En déduire le plus petit des multiples communs strictement positifs de 18 et 30 (noté PPCM (18 ; 30))
3. Comparer les nombres 18×30 et $\text{PPCM}(18 ; 30) \times \text{PGCD}(18 ; 30)$.

Exercice 9

On pose $M = \frac{20755}{9488} - \frac{3}{8}$

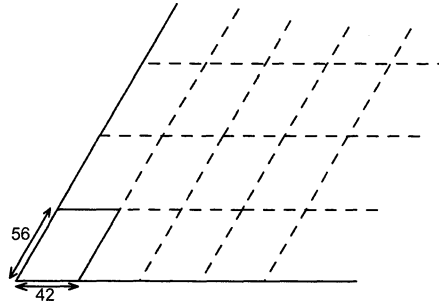
1. Calculer le plus grand diviseur commun D aux deux nombres 20755 et 9488.
2. Ecrire en détaillant les calculs, le nombre M sous la forme d'une fraction irréductible.
3. Le nombre M est-il décimal ? Est-il rationnel ? Justifier.

Exercice 10

1. Calculer le PGCD de 110 et de 88.
2. Un ouvrier dispose de plaques de métal de 110 cm de longueur et de 88 cm de largeur. Il a reçu la consigne suivante: "Découper dans ces plaques des carrés tous identiques, les plus grands possibles, de façon à ne pas avoir de perte." Quelle sera la longueur du côté d'un carré?
3. Combien obtiendra t-il de carrés par plaque?

Exercice 11

Au centre d'une place, on veut réaliser un losange décoratif de longueur inconnue x , en assemblant des carreaux en forme de parallélogrammes comme l'indique le schéma ci-contre. Les mesures de longueurs sont exprimées en centimètres.



1. Déterminer la valeur minimale x puis le nombre des carreaux disposés.
2. Déterminer x dans les cas suivants
 - a. On dispose 48 carreaux.
 - b. On dispose 108 carreaux
3. Sachant que l'on dispose au plus de 192 carreaux. déterminer toutes les longueurs x possibles pour le côté du losange.

Exercice 12

1. k et p sont deux entiers naturels non nuls Montrer les propositions suivantes :
 - a) Si k est pair alors k^2 est divisible par 4.
 - b) Si k et p sont impairs alors $(k+p)(k-p)$ est divisible par 4.
 - c) Si k est impair alors $3k + 1$ est pair.
 - d) Si k est pair alors $3k + 2$ est pair
 - e) Si k est impair alors $3k + 2$ est impair.

2. Soient a et b deux entiers naturels tels que $a > b$. Montrer que $a^2b^2(a^2 - b^2)$ est divisible par 3 et par 4. (utiliser l'arbre de choix)
3. Quel est le plus petit entier naturel qui admet 1, 1 et 5 lorsqu'il est divisé par 3, 5 et 7 respectivement ?

IV. Corrigés des exercices (je maîtrise mes connaissances)

Exercice 1

- $643 = 23 \times 27 + 22$ donc le quotient est 27 le reste est 22
- $751 = 12 \times 62 + 7$ donc le quotient est 62 le reste est 7
- $1596 = 435 \times 3 + 291$ donc le quotient est 3 le reste est 291
- $2593 = 47 \times 55 + 8$ donc le quotient est 55 le reste est 8
- $487 = 65 \times 7 + 32$ donc le quotient est 7 le reste est 32

Exercice 2

1. $726 = 2 \times 3 \times 11^2$; $321 = 3 \times 107$
2. $D_a = \{1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 22 ; 33 ; 66 ; 121 ; 242 ; 363 ; 726\}$,
 $D_b = \{1 ; 3 ; 107 ; 321\}$ donc PGCD (a, b) = 3.
3. On peut trouver le PGCD (ab) par la méthode d'Algorithme d'Euclide.
4. PPCM (a, b) = $2 \times 3 \times 11^2 \times 107 = 77682$.
5.
$$x = \frac{726}{321} = \frac{2 \times 3 \times 11^2}{3 \times 107} = \frac{11^2 \times 2}{107} = \frac{242}{107}$$

Exercice 3

- | | | |
|----|--|--|
| a. | $\begin{array}{r l} 5274 & 3492 \\ 1782 & 1 \end{array}$ | Donc $5\,274 = 1 \times 3\,492 + 1782$. |
| b. | $\begin{array}{r l} 3492 & 1782 \\ 1710 & 1 \end{array}$ | Donc $3\,492 = 1 \times 1782 + 1710$. |
| c. | $\begin{array}{r l} 1782 & 1710 \\ 72 & 1 \end{array}$ | Donc $1782 = 1 \times 1710 + 72$. |
| d. | $\begin{array}{r l} 1710 & 72 \\ 54 & 23 \end{array}$ | Donc $1710 = 23 \times 72 + 54$. |
| e. | $\begin{array}{r l} 72 & 54 \\ 18 & 1 \end{array}$ | Donc $72 = 1 \times 54 + 18$. |
| f. | $\begin{array}{r l} 54 & 18 \\ 0 & 3 \end{array}$ | Donc $54 = 3 \times 18 + 0$. |

- g. $\frac{5274}{18} = 293$; $\frac{3492}{18} = 194$ On constate que 18 est le plus grand commun diviseur des nombres 5 274 et 3 492.

Exercice 4

- $170000 = 17 \times 10^4$
- $0,00000203 = 203 \times 10^{-8}$
- $-12,5000000 = -125 \times 10^{-1}$
- $\frac{42}{1000000} = 42 \times 10^{-6}$
- $\frac{47}{40} = \frac{47}{2^3 \times 5} = \frac{47 \times 5^2}{2^3 \times 5 \times 5^2} = \frac{47 \times 25}{(2 \times 5)^3} = \frac{1175}{10^3} = 1175 \times 10^{-3}$
- $\frac{23}{80} = \frac{23}{2^4 \times 5} = \frac{23 \times 5^3}{2^4 \times 5 \times 5^3} = \frac{2875}{10^4} = 2875 \times 10^{-4}$

Exercice 5

1. $x = 8n + 13 = 4 \times 2n + 4 \times 3 + 1$ donc $x = 4(2n + 3) + 1$. c'est à dire que le quotient de la division euclidienne de x par 4 est $2n + 3$, le reste est 1.
 $y = 4 \times 11n + 4 \times 51 + 3 = 4(11n + 51) + 3$. Donc le quotient de la division euclidienne de y par 4 est $11n + 51$, le reste est 3.
2. $x + y = 4(2n + 3) + 1 + 4(11n + 51) + 3$ d'où
 $x + y = 4(2n + 3 + 11n + 51 + 1) = 4(13n + 55)$
donc $x + y$ est divisible par 4, c'est-à-dire $x + y$ n'est pas premier.

Exercice 6

1. n est un entier naturel différent de 1 donc $n \geq 2$ d'où $n^3 - n$ est un entier naturel.
2. $n^3 - n = n(n^2 - 1)$ donc $n^3 - n$ est divisible par n d'où il n'est pas premier.
3. $n^3 - n = n(n - 1)(n + 1)$ d'où n , $(n - 1)$ et $(n + 1)$ sont trois diviseurs de $n^3 - n$.

Exercice 7

1. Soit n un entier pair donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$ d'où $n^2 = 4p^2$ donc n^2 est divisible par 4.
2. Si n est un entier impair alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$
d'où $n^2 = (2p + 1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 4(p^2 + p) + 1$ d'où le reste de la division euclidienne de n^2 par 4 est 1 c'est-à-dire que n^2 n'est pas divisible par 4.

3. a) Pour tout entier naturel $n > 2$, on a : $\frac{4n}{n-2} = \frac{4(n-2)+8}{n-2} = 4 + \frac{8}{n-2}$.
- b) $\frac{4n}{n-2}$ est un entier si $n-2$ est un diviseur de 8, or $D_8 = \{1 ; 2 ; 4 ; 8\}$
donc $n-2 = 1$ ou $n-2 = 2$ ou $n-2 = 4$ ou $n-2 = 8$
c'est-à-dire que $n = 3$ ou $n = 4$ ou $n = 6$ ou $n = 10$
- 4) a) Pour tout entier naturel $n > 2$, on a : $\frac{4n-16}{n-2} = \frac{4(n-2)-8}{n-2} = 4 - \frac{8}{n-2}$.
- b) Pour que $\frac{4n-16}{n-2}$ soit un entier naturel il faut que $n-2$ est un diviseur de 8 et que $\frac{8}{n-2} \leq 4$
or d'après la question précédente si $n = 3$, $\frac{8}{n-2} = 8$ donne $\frac{8}{n-2} > 4$.
Vérifier que les entiers $n = 4$, $n = 6$ et $n = 10$ sont acceptables.
- c) Les entiers 5 ; 10 ; 15 ; 20 et 25 sont cinq multiples consécutifs de 5.
La somme $S = (5 + 10 + 15 + 20 + 25) = 75$ donc
 $S = 3 \times 25$ c'est-à-dire que S est divisible par 25.
- d) Soit a , b , c , d et e cinq multiples consécutifs de 5 d'où il existe un entier naturel non nul p tel que $a = 5p$; $b = 5(p+1)$; $c = 5(p+2)$;
 $d = 5(p+3)$ et $e = 5(p+4)$ donc
 $a + b + c + d + e = 5(p + p+1 + p+2 + p+3 + p+4)$ c'est à dire que
 $a + b + c + d + e = 5(5p + 10) = 25(p+2)$
donc $a + b + c + d + e$ est un multiple de 25.

Exercice 8

- $18 = 2 \times 3^2$; $30 = 2 \times 3 \times 5$ donc 6 est le plus grand commun diviseur de 18 et 30
- a- Les six premiers multiples de 18 sont 18 ; 36 ; 54 ; 72 ; 90 et 108
b- Les quatre premiers multiples de 30 sont 30 ; 60 ; 90 et 120.
c- D'après a- et b- PPCM (18,30) = 90
- $18 \times 30 = 540$ et PPCM (18,30) \times PGCD (18,30) = $90 \times 6 = 540$

Exercice 9

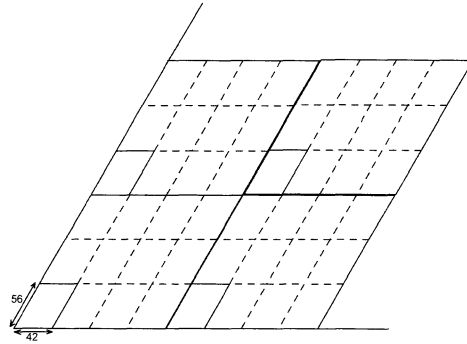
- $20755 = 35 \times 593$ et $9488 = 16 \times 593$. donc PGCD (20755 , 9488) = 593.
- $M = \frac{20755}{9488} - \frac{3}{8} = \frac{593 \times 35}{593 \times 16} - \frac{3}{8} = \frac{29}{16}$
- M est un rationnel puisqu'il est de la forme $\frac{a}{b}$, avec a et b entiers.
 M est décimal puisqu'il est de la forme $\frac{a}{2^n}$.

Exercice 10

1. $110 = 2 \times 5 \times 11$ et $88 = 2 \times 2 \times 2 \times 11$
donc $\text{PGCD}(110, 88)$ est égal à 2×11 soit 22.
2. La longueur du côté du carré sera égale au PGCD de 110 et 88
c'est à dire 22 cm.
3. On obtient ainsi 4 rangées de 5 carrés soit 20 carrés par plaques.

Exercice 11

1. La longueur minimale x pour le côté du losange est le PPCM $(42, 56) = 168$. On a :
 $\frac{168}{42} = 4$ et $\frac{168}{56} = 3$ il faut disposer $4 \times 3 = 12$ carreaux
2. a. $\frac{48}{12} = 4$ donc on dispose 4 blocs de 12 carreaux comme l'indique la figure ci-contre d'où $x = 168 \times 2$ donc $x = 336$



- b. $\frac{108}{12} = 9$ donc on dispose 9 blocs de 12 carreaux d'où $x = 168 \times 3 = 504$.
3. Sachant que l'on dispose au plus de 192 carreaux. $\frac{192}{12} = 16$ donc la valeur maximale x pour le côté du losange est $4 \times 168 = 672$, et par suite les valeurs possible de x sont 168, 336, 504 et 672.

Exercice 12

1. a) Si k est un entier naturel non nul pair alors il existe un entier naturel non nul k' tel que $k = 2k'$ donc $k^2 = 4k'^2$ d'où k^2 est divisible par 4.
- b) k et p entiers naturels impairs donc il existent k' et p' entiers naturels tels que $k = 2k' + 1$ et $p = 2p' + 1$
d'où $(k + p)(k - p) = (2k' + 2p' + 2)(2k' - 2p') = 4(k' + p' + 1)(k' - p')$
et par suite $(k + p)(k - p)$ est divisible par 4.
- c) Si k est impair alors il existe un entier k' tel que $k = 2k' + 1$
d'où $3k + 1 = 6k' + 4 = 2(3k' + 2)$ d'où $3k + 1$ est pair.
- d) k est pair alors il existe un entier k tel que $k = 2k'$
d'où $3k + 2 = 6k' + 2 = 2(3k' + 1)$ donc $3k + 2$ est pair.
- e) Si k est impair alors il existe un entier k' tel que $k = 2k' + 1$
d'où $3k + 2 = 3(2k' + 1) + 2 = 6k' + 5 = 2(3k' + 2) + 1$ donc $3k + 2$ est impair.

2. En utilisant la question 1. et l'arbre du choix suivante pour vérifier que $a^2b^2(a^2 - b^2)$ est divisible par 4 .

$$\begin{array}{lcl}
 a = 3k & \begin{array}{l} \nearrow \\ \rightarrow \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{l} b = 3p \quad \Rightarrow \quad a^2b^2(a^2 - b^2) = 9(3k)^2(3p)^2(k+p)(k-p) \\ b = 3p + 1 \quad \Rightarrow \quad a^2b^2(a^2 - b^2) = 9k^2(3p+1)^2(3(k-p)+1)(3(k+p)+1) \\ b = 3p + 2 \quad \Rightarrow \quad a^2b^2(a^2 - b^2) = 9k^2(3p+2)^2(3(k-p)-2)(3(k+p)+2) \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 a = 3k + 1 & \begin{array}{l} \nearrow \\ \rightarrow \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{l} b = 3p \quad \Rightarrow \quad a^2b^2(a^2 - b^2) = 9p^2(3k+1)^2(3(k-p)+1)(3(k+p)+1) \\ b = 3p + 1 \quad \Rightarrow \quad a^2b^2(a^2 - b^2) = (3k+1)^2(3p+1)^2(3(k-p))(3(k+p)+2) \\ b = 3p + 2 \quad \Rightarrow \quad a^2b^2(a^2 - b^2) = (3k+1)^2(3p+2)^2(3(k-p)-1)(3(k+p)+1) \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 a = 3k + 2 & \begin{array}{l} \nearrow \\ \rightarrow \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{l} b = 3p \quad \Rightarrow \quad a^2b^2(a^2 - b^2) = (3k+2)^2(9p^2)(3(k-p)+2)(3(k+p)+2) \\ b = 3p + 1 \quad \Rightarrow \quad a^2b^2(a^2 - b^2) = (3k+2)^2(3p+1)^2(3(k-p)+1)(3(k+p)+1) \\ b = 3p + 2 \quad \Rightarrow \quad a^2b^2(a^2 - b^2) = (3k+2)^2(3p+2)^2(3(k-p))(3(k+p)+1) \end{array}
 \end{array}$$

Théorème de Thalès et sa réciproque

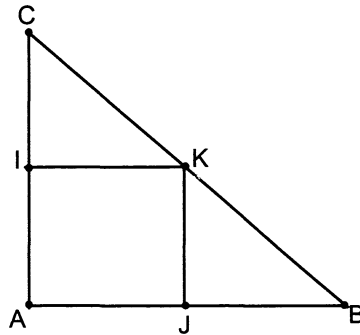
I. Activités pour bien assimiler mon cours

Activité 1 (Segment joignant les milieux de deux côtés d'un triangle)

La figure ci-contre présente un triangle ABC isocèle et rectangle en A.

On désigne par I = A'C et J = A'B.

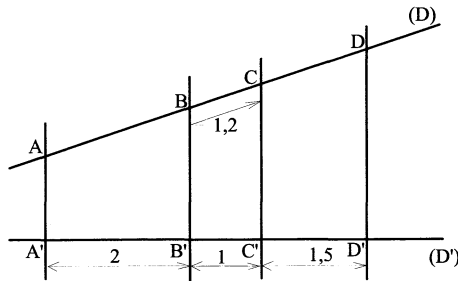
1. La parallèle à (AB) passant par I coupe (BC) en K. Que représente K pour le segment [BC] ?
2. Montrer que AIKJ est un carré



Dans un triangle le segment joignant les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté et a pour longueur sa moitié.

Activité 2 (Théorème de Thalès)

La figure ci-contre présente deux droites (D) et (D') coupées par les parallèles (AA'), (BB'), (CC') et (DD'). On demande de calculer les distances AB, CD et AD



Si trois droites parallèles D_1 , D_2 et D_3 coupent deux droites (D) et (D') respectivement en A, B et C et en A', B' et C' alors :

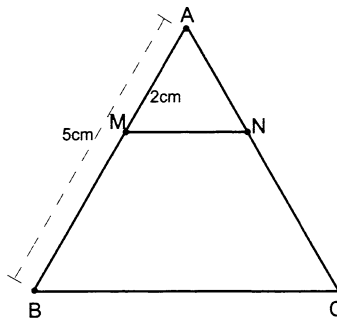
• $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$; $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$; $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ et $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$

Activité 3 (application Théorème de Thalès)

La figure ci-contre présente un triangle ABC et M un point du segment [AB]. La parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en N.

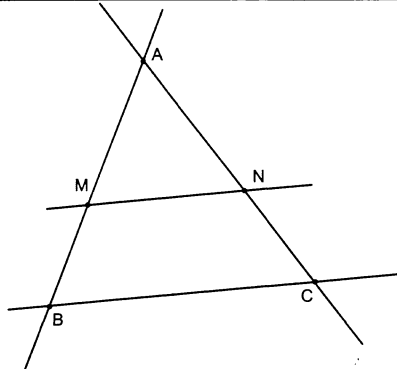
On donne $AM = 2$,
 $AB = AC = 5$ et $MN = 2$.

1. Calculer BC
2. Montrer que le triangle AMN est équilatéral.



Soient deux droites (AB) et (AC),
M un point de (AB) et N un point
de (AC). Si les droites (BC) et
(MN) sont parallèles alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

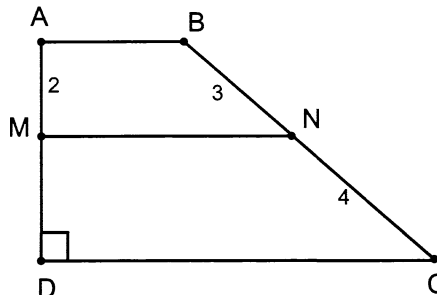


Activité 4 (application du Théorème de Thalès)

La figure ci-contre représente un
Trapèze rectangle ABCD et M un
point du segment [AD]. La parallèle
à (DC) passant par M coupe (BC)
en N. On donne $AM = 2$,
 $NB = 3$ et $NC = 4$.

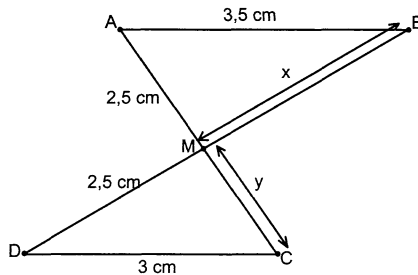
1. Calculer MD
2. Trouver les rapports

$$\frac{AD}{BC} \text{ et } \frac{AM}{AD}$$



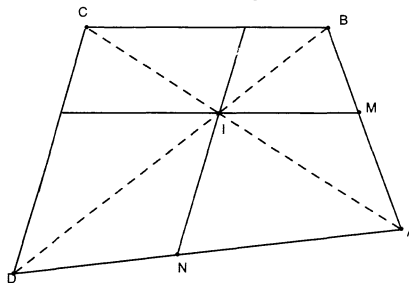
Activité 5 (application du Théorème de Thalès)

Dans la figure ci-contre on a :
 $(AB) \parallel (CD)$.
 Déterminer les mesures x et y .



Activité 6 (Réciproque du théorème de Thalès)

Soit ABCD un quadrilatère. Par le point I intersection de $[AC]$ et $[BD]$ on mène la parallèle à (BC) qui coupe (AB) en M et la parallèle à (CD) coupe (AD) en N. Démontrer que (MN) et (BD) sont parallèles.



Etant donnés deux points A et B d'une droite (D) et deux points A' et B' d'une droite (D') tel que $(AA') \parallel (BB')$.

Soient deux points C et C' respectivement de (D) et (D') tels que les points A, B, C d'une part et A' , B' , C' d'autre part se succèdent dans le même ordre sur les droites qui les portent.

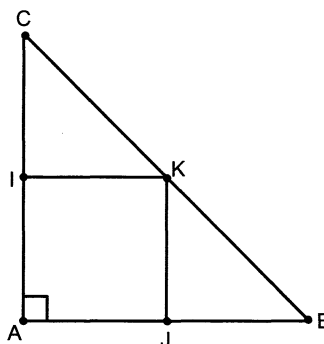
Si $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ alors les droites (AA') et (CC') sont parallèles.

II. Corrigés des activités (bien assimiler mon cours)

Activité 1

La figure ci-contre représente un triangle ABC isocèle et rectangle en A. On désigne par $I = A * C$ et $J = A * B$.

1. La parallèle à (AB) passant par I coupe $[BC]$ en son milieu donc $K = B * C$.
2. On a : $(IK) \parallel (AB)$ et $(JK) \parallel (AC)$ donc $(IK) \parallel (AJ)$ et $(JK) \parallel (AI)$ d'où AIKJ est un parallélogramme et puisque (AI) perpendiculaire à (AJ) et $AI = AJ$ donc AIKJ est un carré.



Activité 2

La figure ci-contre présente deux droites (D) et (D') coupées par les parallèles (AA'), (BB'), (CC') et (DD'). On demande de calculer les distances AB, CD et AD.

D'après le théorème de Thalès on a

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \text{ donc } AB = \frac{A'B'}{B'C'} \times BC$$

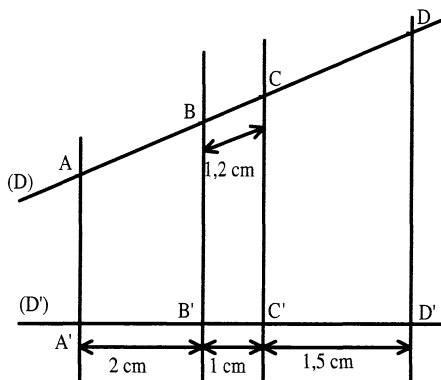
$$\text{d'où } AB = 2 \times 1,2 = 2,4 \text{ cm.}$$

De même

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \text{ donc } CD = \frac{AB \times C'D'}{A'B'}$$

$$\text{d'où } CD = \frac{2,4 \times 1,5}{2} = 1,8 \text{ cm}$$

$$AD = AB + BC + CD = 5,4 \text{ cm.}$$



Activité 3

1. Dans le triangle ABC on a : $(MN) \parallel (BC)$ d'où $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ ce qui

$$\text{donne } \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \text{ signifie que } BC = \frac{AB \times MN}{AM} \text{ donc } BC = \frac{5 \times 2}{2} = 5.$$

2. De même on a : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ donc $AN = \frac{AM \times AC}{AB} = 2$

et par suite on a : $AM = AN = MN$ d'où le triangle AMN est équilatéral.

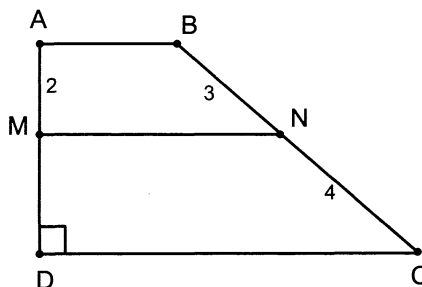
Activité 4

1. Puisque $(AB) \parallel (MN) \parallel (DC)$ alors

$$\text{d'après Thalès on a : } \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$

$$\text{donne } MD = \frac{AM \times NC}{BN} = \frac{2 \times 4}{3} = \frac{8}{3}$$

$$2. \frac{AD}{BC} = \frac{AM}{BN} = \frac{2}{3} \text{ et } \frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC} = \frac{3}{7}$$



Activité 5

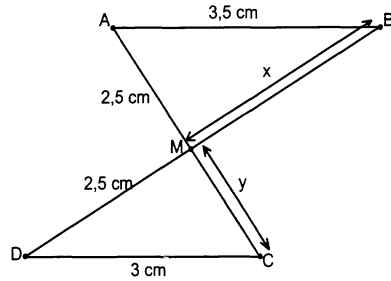
Dans la figure ci-contre on a : $(AB) \parallel (CD)$. Déterminer les mesures x et y .

On a : $(AB) \parallel (DC)$ donc $\frac{MD}{MB} = \frac{MC}{MA} = \frac{DC}{AB}$

donc la relation :

$$\frac{MD}{MB} = \frac{DC}{AB} \text{ donne } MB = \frac{MD \times AB}{DC} \approx 2,9 \text{ et}$$

$$\frac{MC}{MA} = \frac{DC}{AB} \text{ donne } MC = \frac{MA \times DC}{AB} \approx 2,14$$



Activité 6

Dans le triangle ABC on a : $I \in (AC)$, $M \in (AB)$ et $(IM) \parallel (BC)$ donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AI}{AC}$ (1) et

dans le triangle ADC on a : $I \in (AC)$, $N \in (AD)$ et $(IN) \parallel (DC)$ d'où $\frac{AI}{AC} = \frac{AN}{AD}$ (2)

d'après les relations (1) et (2) on déduit que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$.

$M \in [AB]$ et $N \in [AD]$, en appliquant la réciproque de Thalès, on aura $(MN) \parallel (BD)$

III. Exercices (je maîtrise mes connaissances)

Exercice 1

Sur la figure ci-contre, les droites (AG) et (RB) sont parallèles.

Les droites (AB) et (RG) se coupent en E.

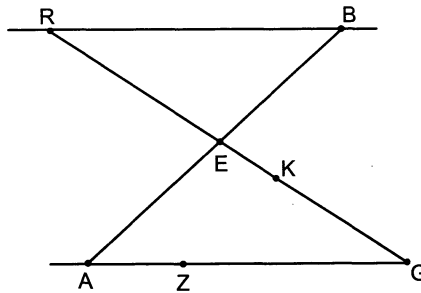
L'unité de longueur est le centimètre.

On donne : $BE = 3$; $ER = 4,8$; $AG = 10$ et $EG = 8$.

(Les dimensions sur le schéma ne sont pas respectées).

1°) Calculer les distances RB et AE (justifier).

2°) On donne $GK = 6,4$ et $GZ = 8$. Montrer que les droites (ZK) et (AE) sont parallèles.



Exercice 2

Tracer un triangle ABC tel que $AB = 6$, $AC = 4,8$ et $BC = 8,4$.

Sur la demi-droite d'origine B contenant A, on place E tel que $BE = 11$. Sur la demi-droite d'origine C contenant A, on place F tel que $CF = 8,8$.

1. Calculer AE et AF.
2. Prouver que (EF) et (BC) sont parallèles.
3. Calculer la longueur du segment [EF].

Exercice 3

On considère un triangle ABC rectangle en A avec $AB = 3$ et $BC = 5$ et on pose H le projeté orthogonal de A sur [BC]. Soit D le point de [BC] tel que $CD = 2$. La perpendiculaire à (AB) issue de D coupe (AB) en K.

1. Faites un dessin et montrer que $\frac{BK}{BA} = \frac{BD}{BC}$, puis calculer BK.

2. La perpendiculaire à (BC) en D coupe (AB) en E.

Montrer que $\frac{BH}{BD} = \frac{BA}{BE}$.

3. Montrer que : $\frac{BH}{BC} = \frac{BA}{BE}$. En déduire que (HK) et (EC) sont parallèles.

Exercice 4

Sur une droite D, placer les points A, B, C dans cet ordre tels que $AB = 6$, $BC = 3$. O est le milieu de [AB] et O' est le milieu de [BC]. Tracer le cercle (C) de diamètre [AB] et le cercle (C') de diamètre [BC]. Sur (C) placer le point D tel que $AD = 3,6$.

La droite (BD) coupe (C') en E.

1. Faire un dessin que l'on complètera tout au long du problème.
2. Donner la nature des triangles ADB et BCE (Justifier votre réponse). En déduire que (AD) et (CE) sont parallèles.
3. Calculer CE.
4. Construire le point F symétrique de E par rapport à C. (FB) coupe (AE) en J et (FA) coupe (DE) en I.
 - a) Que représente [AC] pour le triangle AEF ?
 - b) Vérifier que $AB = \frac{2}{3} AC$. Que représente B pour le triangle AEF ?
5. Démontrer que I est le milieu de [AF] et que J est le milieu de [AE].
6. Démontrer que (IJ) est parallèle à (AD).

Exercice 5

Soit un quadrilatère ABCD, et le point L de [AB] tel que $\frac{BL}{BA} = \frac{3}{4}$, M le point de [CB] tel que $\frac{BM}{BC} = \frac{3}{4}$, N le point de [CD] tel que $\frac{DN}{DC} = \frac{3}{4}$, P le point de [AD] tel que $\frac{DP}{DA} = \frac{3}{4}$

1. Que peut on dire du quadrilatère LMNP ? Justifier votre réponse.
2. On suppose que $AC = BD$. Montrer que $PL + LM = BD$

Exercice 6

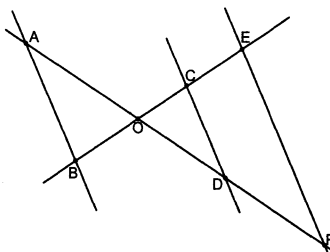
Soit ABCD un trapèze non isocèle de bases [AD] et [BC], les droites (AB) et (CD) se coupent en O.

1. Montrer que $\frac{OA}{AB} = \frac{OD}{DC}$
2. On donne $CD = 5$; $AB = 3$ et $OA = 4$. Calculer CD
3. Construire le point E tel que ABED est un parallélogramme. La parallèle à (AE) passant par B coupe (OE) en F.
 - a) Comparer les rapports $\frac{OB}{OA}$ et $\frac{OF}{OE}$ puis $\frac{OB}{OA}$ et $\frac{OC}{OD}$
 - b) Montrer que les droites (FC) et (DE) sont parallèles.
 - c) Calculer CF.

Exercice 7

On donne la figure suivante dans laquelle :
 (AB) et (EF) sont parallèles,
 $OA = 3,4$; $AF = 9,8$; $OE = 7,2$ $AB = 4$;
 $OD = 5,6$ et $OC = 6,3$.

1. Calculer EF et OB.
2. Que peut-on dire des droites (CD) et (EF) ? Justifier.



Exercice 8

On considère un parallélogramme ABCD et une droite (Δ) passant par A et qui coupe (BC) en A', (CD) en B' et (BD) en C'.

1. Comparer les rapports $\frac{C'B}{C'D}$ et $\frac{C'A'}{C'A}$ puis les rapports $\frac{C'B}{C'D}$ et $\frac{C'A}{C'B'}$. En déduire que $C'A^2 = C'A' \cdot C'B'$.
2. Comparer les rapports $\frac{B'C}{B'D}$ et $\frac{B'A'}{B'A}$ puis $\frac{BA'}{BC}$ et $\frac{AA'}{AB'}$.

Exercice 9

- I. Soit un triangle ABC, une droite Δ ne contenant aucun des points A, B et C coupe (BC) en P, (CA) en Q et (AB) en R. La parallèle à Δ passant par B coupe (AC) en D.
1. Comparer les rapports $\frac{PB}{PC}$ et $\frac{QD}{QC}$.
 2. Comparer les rapports $\frac{RA}{RB}$ et $\frac{QA}{QD}$.
 3. Montrer que : $\frac{PB}{PC} \times \frac{QC}{QA} \times \frac{RA}{RB} = 1$.
- II. Soit un triangle ABC et P, Q et R trois points appartenant respectivement à (BC) (CA) et (AB) tel que : $\frac{PB}{PC} \times \frac{QC}{QA} \times \frac{RA}{RB} = 1$ montrer que les points P, Q et R sont alignés.

Exercice 10 (d'après concours ATSM 2005)

On considère un triangle ABC et M le milieu de [BC], sur [AM] on prend deux points D et E tel que AE = ED. Montrer que $ME < \frac{BD + AC}{2}$ (utiliser l'inégalité triangulaire).

IV. Corrigés des exercices (je maîtrise mes connaissances)

Exercice 1

1. Les droites (AB) et (RG) sont sécantes en E et coupées par les parallèles (RB) et (AG).

En appliquant le théorème de Thalès

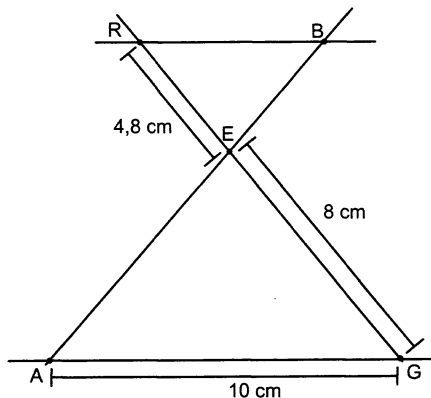
on aura : $\frac{ER}{EG} = \frac{EB}{EA} = \frac{RB}{AG}$ d'où

$$\frac{ER}{EG} = \frac{RB}{AG} \text{ donne } RB = \frac{ER \times AG}{EG}$$

donc $RB = \frac{4,8 \times 10}{8} = 6$. De même la

relation :

$$\frac{ER}{EG} = \frac{EB}{EA} \text{ donne } EA = \frac{EG \times EB}{ER} = \frac{8 \times 3}{4,8} = 5$$



2. On calcule d'abord les rapports $\frac{GK}{GE}$ et $\frac{GZ}{GA}$, on obtient donc $\frac{GK}{GE} = \frac{6,4}{8} = 0,8$

et $\frac{GZ}{GA} = \frac{8}{10} = 0,8$ donc $\frac{GK}{GE} = \frac{GZ}{GA}$; $K \in [GE]$ et $Z \in [GA]$ d'après la réciproque du théorème de Thalès on déduit que les droites (KZ) et (AE) sont parallèles.

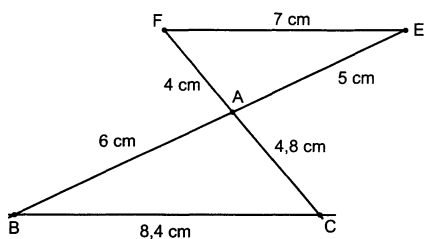
Exercice 2

1. $AE = EB - AB = 11 - 6 = 5$ cm
 $AF = FC - AC = 8,8 - 4,8 = 4$ cm

2. On a :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{5}{6} \text{ et } \frac{AF}{AC} = \frac{4}{4,8} = \frac{40}{48} = \frac{5}{6} \text{ d'où}$$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} ; A \in [EB] \text{ et } A \in [FC]$$



d'après la réciproque de Thalès on déduit que $(EF) \parallel (BC)$.

3. Les droites (FC) et (BE) sont coupées par les parallèles (EF) et (CB) d'après le théorème de Thalès on déduit que $\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{CB}$ donc la relation :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{CB} \text{ donne } EF = \frac{AE \times CB}{AB} = \frac{5 \times 8,4}{6} = 7$$

Exercice 3

1. Dans le triangle ABC on a :

$$(DK) \parallel (AC) \text{ donc } \frac{BK}{BA} = \frac{BD}{BC} \text{ d'où}$$

$$BK = \frac{BD \times BA}{BC} = \frac{9}{5} = 1,8$$

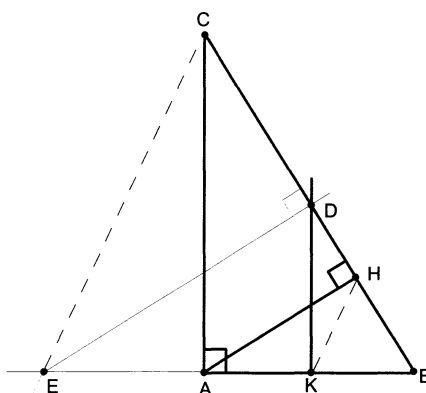
2. De même dans le triangle BDE

$$\text{on a : } (DE) \parallel (AH) \text{ donc } \frac{BH}{BD} = \frac{BA}{BE}$$

$$3. BH = \frac{BD \times BA}{BE} \text{ donc } \frac{BH}{BC} = \frac{BD \times BA}{BE \times BC}$$

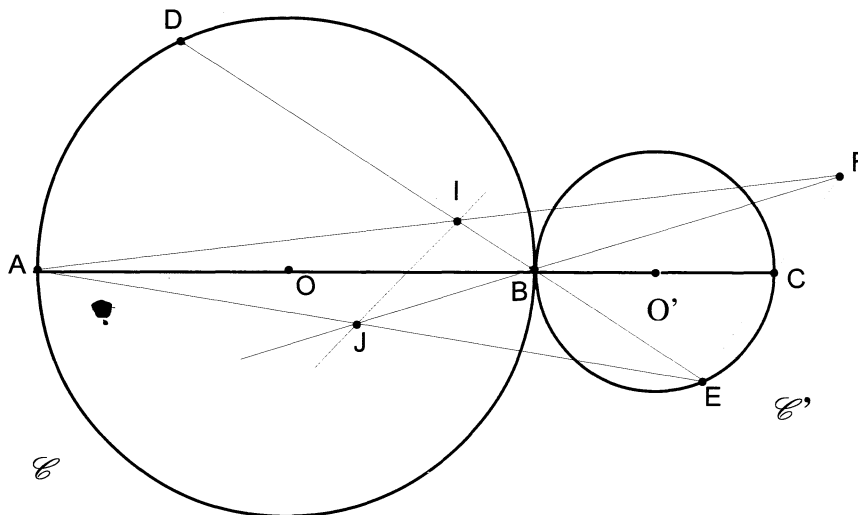
$$\text{d'où } \frac{BH}{BC} = \frac{BA}{BE} \times \frac{BK}{BA} = \frac{BK}{BE}$$

$H \in [BC]$ et $K \in [BE]$ donc, en appliquant la réciproque du théorème de Thalès, on déduit que $(KH) \parallel (EC)$



Exercice 4

1.



2. $[AB]$ est un diamètre de \mathcal{C} et D un point de ce cercle donc le triangle ABD est rectangle en D . De même le triangle BCE est rectangle en E car $[BC]$ est un diamètre de \mathcal{C}' et E un point de ce cercle. On a : les droites (AD) et (CE) sont parallèles car elles sont perpendiculaires à une même droite (DE) .
3. En appliquant le théorème de Thalès on aura :

$$\frac{BC}{BA} = \frac{BE}{BD} = \frac{CE}{AD} \text{ donc } \frac{3}{6} = \frac{CE}{3,6} \text{ donne } CE = 1,8$$
4. a) Puisque C est le milieu de $[EF]$ donc $[AC]$ est la médiane du triangle AEF issue de A .
 b) $\frac{AB}{AC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ donc $AB = \frac{2}{3}AC$; $B \in [AC]$ donc B est le centre de gravité du triangle AEF .
5. Puisque B est le centre de gravité du triangle AEF alors $[EB]$ coupe $[AF]$ en son milieu et par suite I est le milieu de $[AF]$, de même $[FB]$ coupe $[AE]$ en son milieu donc J est le milieu de $[AI]$.
6. Dans le triangle AEF le segment joignant les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté donc $(IJ) \parallel (EF)$, et on a : $(EF) \parallel (AD)$ Donc $(IJ) \parallel (AD)$.

Exercice 5

1. On a : $\frac{BL}{BA} = \frac{BM}{BC}$ et $\frac{DN}{DC} = \frac{DP}{DA}$ et

en appliquant la réciproque de Thalès on déduit que $(LM) \parallel (AC)$ et $(NP) \parallel (AC)$ donc $(NP) \parallel (AC)$
d'autre part la relation

$$\frac{BL}{BA} = \frac{3}{4} \text{ donne } BL = \frac{3}{4} BA \text{ donc}$$

$$AL = \frac{1}{4} AB \text{ et de la même façon}$$

on trouve $AP = \frac{1}{4} AD$, $CN = \frac{1}{4} CD$ et $CM = \frac{1}{4} CB$ ce qui donne $\frac{AP}{AD} = \frac{AL}{AB}$

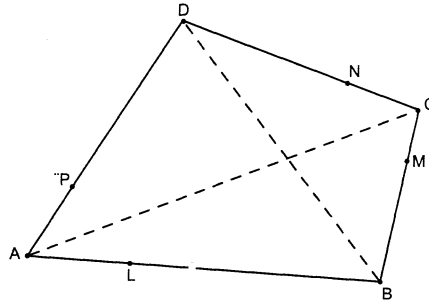
et $\frac{CN}{CD} = \frac{CM}{CB}$ donne $(PL) \parallel (BD)$ et $(NM) \parallel (BD)$ donc $(PL) \parallel (NM)$ et par suite

LMNP est un parallélogramme.

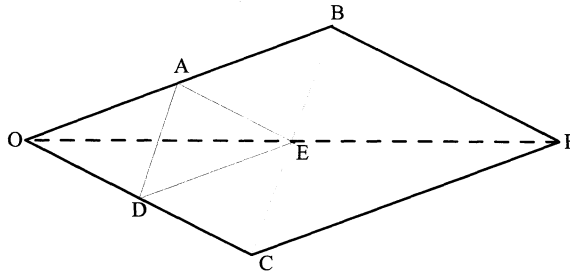
2. Dans le triangle ABC on a : $(LM) \parallel (AC)$ donc $\frac{BL}{BA} = \frac{BM}{BC} = \frac{LM}{AC} = \frac{3}{4}$ de même

dans le triangle ABD on a : $(PL) \parallel (BD)$ donc $\frac{AL}{AB} = \frac{AP}{AD} = \frac{PL}{BD} = \frac{1}{4}$ on déduit

donc que $PL = \frac{1}{4} BD$ et $LM = \frac{3}{4} AC$ d'où $PL + LM = \frac{1}{4} BD + \frac{3}{4} BD = BD$



Exercice 6



1. Dans le triangle OCB on a : $(AD) \parallel (BC)$ donc d'après le théorème de

Thalès on a : $\frac{OA}{AB} = \frac{OD}{DC}$ (1)

2. De la relation (1) on déduit que : $DC = \frac{OD \times AB}{OA} = \frac{5 \times 3}{4} = \frac{15}{4} = 3,75$

3. (voir figure précédente)

a) Dans le triangle OBF on a : $(AE) \parallel (BF)$ donc $\frac{OB}{OA} = \frac{OF}{OE}$

et dans le triangle OBC on a : $(AD) \parallel (BC)$ donc $\frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OD}$.

b) Des deux relations précédentes on déduit que : $\frac{OF}{OE} = \frac{OC}{OD}$ et d'après la

réci-proque du théorème de Thalès on aura $(FC) \parallel (ED)$.

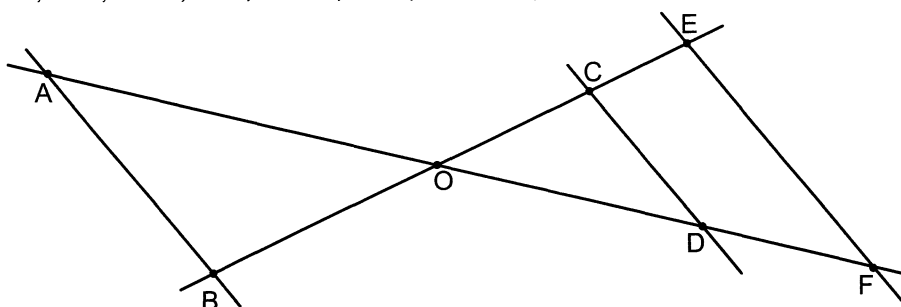
c) On a : ABED est un parallélogramme donc $DE = AB = 3$ et dans le triangle OFC les droites (DE) et (CF) sont parallèles donc d'après le

théorème de Thalès on aura : $\frac{OD}{OC} = \frac{DE}{CF}$ ce qui donne

$$CF = \frac{OC \times DE}{OD} = \frac{8,75 \times 3}{5} = 5,25$$

Exercice 7

On donne la figure suivante dans laquelle : (AB) et (EF) sont parallèles, $OA=3,4$ cm, $AF=9,8$ cm, $OE=7,2$ cm, $AB=4$ cm, $OD=5,6$ cm et $OC=6,3$ cm.



1. $OF = AF - OA = 9,8 - 3,4 = 6,4$. Les droites (AF) et (BE) sont coupées par les parallèles (AB) et (EF) donc $\frac{OA}{OF} = \frac{AB}{EF}$ donc

$$EF = \frac{OF \times AB}{OA} = \frac{6,4 \times 4}{3,4} = 7,53. \text{ De même on a : } \frac{OB}{OE} = \frac{AB}{EF} \text{ ce qui donne}$$

$$OB = \frac{OE \times AB}{EF} = \frac{7,2 \times 4}{7,53} = 3,82$$

2. On compare les rapports $\frac{OD}{OF}$ et $\frac{OC}{OE}$ on aura : $\frac{OD}{OF} = \frac{5,6}{6,4} = 0,875$

$$\text{et } \frac{OC}{OE} = \frac{6,3}{7,2} = 0,875.$$

$\frac{OD}{OF} = \frac{OC}{OE}$ et $D \in [OF]$, $C \in [OE]$ donc d'après la réci-proque du théorème de Thalès $(DC) \parallel (FE)$

Exercice 8

1. Dans le triangle AC'D on a :

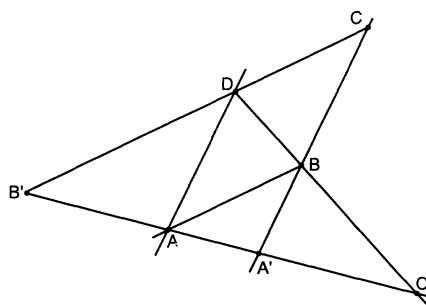
(A'B) // (AD) donc

$$\frac{C'B}{C'D} = \frac{C'A'}{C'A} \quad (1),$$

et dans le triangle C'B'D on a :

(AB) // (B'D) donc :

$$\frac{C'B}{C'D} = \frac{C'A}{C'B'} \quad (2),$$



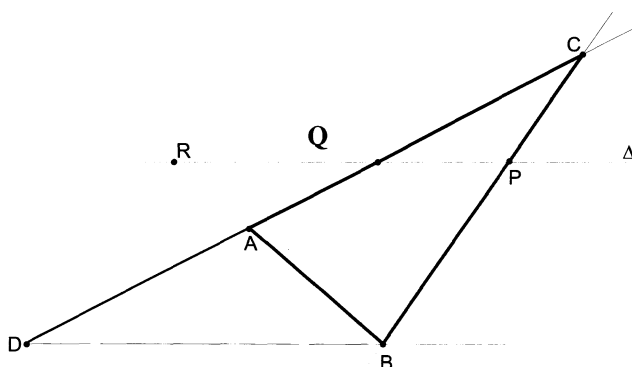
D'après (1) et (2) on déduit que : $\frac{C'A'}{C'A} = \frac{C'A}{C'B'}$ donc $C'A^2 = C'A' \cdot C'B'$.

2. Dans le triangle B'CA' on a : (AD) // (A'C) donc $\frac{B'C}{B'D} = \frac{B'A'}{B'A}$ et dans le même

triangle on a : (AB) // (B'C) et d'après le théorème de Thalès on a : $\frac{BA'}{BC} = \frac{AA'}{AB'}$.

Exercice 9

I.



1. Dans le triangle CBD on a : (PQ) // (BD) donc $\frac{PB}{PC} = \frac{QD}{QC} \quad (1).$

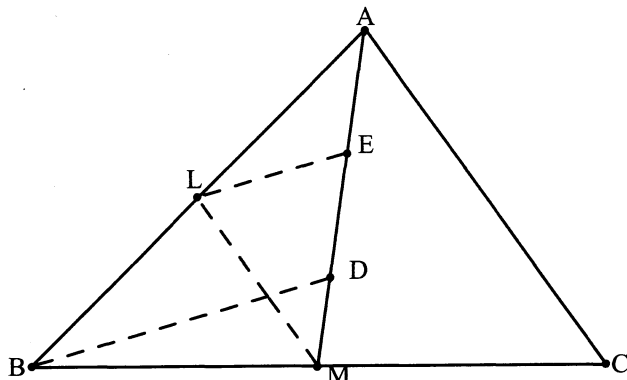
2. Les droites (QD) et (RB) sont coupées par les parallèles (RQ) et (BD) donc

$$\frac{RA}{RB} = \frac{QA}{QD} \quad (2).$$

3. Les relations (1) et (2) donnent $\frac{PB}{PC} \times \frac{QC}{QA} \times \frac{RA}{RB} = \frac{QD}{QC} \times \frac{QC}{QA} \times \frac{QA}{AD} = 1.$

- II. Soit un triangle ABC et P, Q et R trois points appartenant respectivement à (BC), (CA) et (AB) tel que : $\frac{PB}{PC} \times \frac{QC}{QA} \times \frac{RA}{RB} = 1$ supposons que les points P, Q et R sont non alignés. Soit R' l'intersection de (PQ) et (BC) alors, en appliquant les résultats précédents on aura : $\frac{PB}{PC} \times \frac{QC}{QA} \times \frac{R'A}{R'B} = 1$ et puisque $\frac{PB}{PC} \times \frac{QC}{QA} \times \frac{RA}{RB} = 1$ donc $\frac{R'A}{R'B} = \frac{RA}{RB}$ donc R' = R d'où les points P, Q et R sont alignés.

Exercice 10



Soit $L = A * B$. dans le triangle BAD on a : $L = A * B$ et $E = A * D$ donc $LE = \frac{1}{2}BD$.

Dans le triangle ABC on a : $L = A * B$ et $M = B * C$ donc $LM = \frac{1}{2}AC$.

Ainsi $LE + LM = \frac{BD + AC}{2}$. D'après l'inégalité triangulaire, dans le triangle MLE, on a $ME < ML + LE$.

D'où on peut conclure que $ME < \frac{BD + AC}{2}$.

Activités Numériques II

I. Activités pour bien assimiler mon cours

Activité 1 (Opérations de base « calculs dans IR »)

Calculer

1. $\frac{19}{25} + \frac{103}{25} =$; $\frac{8}{3} + \frac{5}{18} =$
2. $\frac{13}{5} - \frac{4}{5} =$; $\frac{3}{5} - \frac{4}{3} =$
3. $\frac{8}{3} + \frac{5}{18} - \frac{4}{9} =$; $\frac{8}{3} - \frac{5}{18} + \frac{4}{9} =$
4. $\frac{125}{52} \times \frac{44}{75} =$
5. $\frac{\frac{1}{23}}{5} =$; $\frac{\frac{42}{5}}{\frac{2}{15}} =$

- a, b, c et d sont des réels tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

Alors on a : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ et $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$

- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

- a et b deux réels non nuls.

Alors l'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$

- a est un réel, b, c et d trois réels non nuls.

Alors $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

Activité 2 (Calculs sous radicaux)

1. Simplifier les expressions suivantes.

$$A = \sqrt{8} + \sqrt{2} \quad ; \quad B = (\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 \quad ; \quad C = \sqrt{\frac{625}{49}}$$

2. Trouver dans chaque cas une écriture sans radical au dénominateur.

$$A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \quad ; \quad B = \frac{1}{\sqrt{3}-3} \quad ; \quad C = \frac{-7}{4\sqrt{2}} \quad ; \quad D = \frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$$

- Soit a un réel positif, la racine carrée de a est le nombre réel positif p tel que $p^2 = a$. On note $\sqrt{a} = p$
- Pour tous réels positifs a et b , on a :
 $(\sqrt{a})^2 = a \quad ; \quad \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}.$
- pour tout réel a , on a : $\sqrt{a^2} = |a|$
- Pour tout réel positif a et pour tout réel strictement positif b , on a : $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$

Activité 3 (Calculs avec des puissances)

Exprimer en fonction des puissances de 2 ou de 3 les expressions suivantes.

1. $x = \frac{(3^5)^7 \times 24}{3^9 \times 9^{13}} \quad ; \quad y = \left(\frac{32}{256}\right)^{10} \times \left(\frac{64}{512}\right)^{-8}$

2. $z = (-1)^{2n+1} + (-1)^{32} + (-2)^3 \times 2^2 \times (-2)^{-4}, n \in \mathbb{N}$

- Soit a un nombre réel et n un entier naturel tel que $n \geq 2$.
La puissance n -ième de a est le nombre, noté $a^n = \underbrace{a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$

- Par convention : quelque soit le nombre a , $a^1 = a$
et quelque soit a non nul , $a^0 = 1$
- Si n est un nombre entier strictement positif et a
un nombre réel non nul , $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; en particulier : $a^{-1} = \frac{1}{a}$

Activité 4 (Règles de calculs sur les puissances entières)

Calculer

1. $A = 2^2 \times 3^3$; $B = 2^3 \times 3^2 \times 5$; $C = 2^4 \times 3^3$

2. $B = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$; $\left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \left(-\frac{2}{5}\right)^3$

Opérations	Conditions	Résultats
Produit de deux puissances	a non nul n, p entiers	$a^n \times a^p = a^{n+p}$
Quotient de deux puissances	a non nul n, p entiers	$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$
Puissance d'une puissance	a non nul n, p entiers	$(a^n)^p = a^{n \times p}$
Puissance d'un produit	a, b non nuls n entier	$(a \times b)^n = a^n \times b^n$
Puissance d'un quotient	a, b non nuls n entier	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Activité 5 (Nombres décimaux « Les puissances de dix »)

Ecrire les expressions suivantes sous forme $a \times 10^n$ ou a est un réel et n est un entier relatif.

1. $A = (10^{-3})^2$; $B = \frac{10^5}{10^{-2}}$; $C = \sqrt{10^{-4}}$

2. $D = \frac{10^2 \times \left(\frac{1}{10}\right)^3}{\left(\frac{1}{1000}\right)^3 \times (10000)^{-5}}$

3. $E = \frac{23}{40}$; $F = \frac{42}{3200}$

- Les décimaux sont des réels qui s'écrivent $a \times 10^n$ avec $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.
- $10^0 = 1$; $10^1 = 10$; $10^2 = 100$; $10^3 = 1000$ etc.
- Pour tout entier naturel p , $10^{-p} = \frac{1}{10^p}$
- Un rationnel $\frac{a}{b}$ est un décimal si b est un produit de puissance de 2 et puissance de 5.

Activité 6 (Comparaisons des nombres réels)

1. Déterminer les ensembles suivants : $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- =$; $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- =$

2. Comparer les réels a et b dans chacun des cas suivants :

$$a = \frac{1}{2} ; b = \frac{7}{15} ; a = 3\sqrt{20} ; b = 4\sqrt{12} ; a = 14 - 6\sqrt{5} ; b = 3 - \sqrt{5}$$

- Pour tous réels x et y , $x \leq y$ équivaut à $(x - y) \in \mathbb{R}_-$ ou $(y - x) \in \mathbb{R}_+$
- Pour tout réel z et pour tous réels x et y :
 $x \leq y$ équivaut à , $x + z \leq y + z$
- Pour tout réel z strictement positif et pour tous réels x et y : $x \leq y$ équivaut à $xz \leq yz$
- Pour tout réel strictement négatif z et pour tous réels x et y : $x \leq y$ équivaut à $xz \geq yz$
- Pour tous réels $x \geq 0$ et $y \geq 0$: $x \leq y$ équivaut à $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$
- Pour tous réels $x \geq 0$ et $y \geq 0$: $x \leq y$ équivaut à $x^2 \leq y^2$
- Pour tous réels $x \leq 0$ et $y \leq 0$: $x \leq y$ équivaut à $x^2 \geq y^2$

Activité 7 (Intervalles de \mathbb{R})

Soit D une droite graduée munie d'un repère (O, I)

1. Placer les points M_1 , M_2 , M_3 et M_4 d'abscisses respectives -2, 3, -1 et 2

2. Représenter sur D les intervalles suivants $[1, 2]$; $]-\infty, -2]$ et $]3, +\infty[$

3. Ecrire à l'aide d'intervalles les ensembles :

$$A = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x < 5\} ; B = \left\{x \in \mathbb{R} / -\frac{1}{2} \leq x - 2 < \frac{1}{2}\right\} ; C = \{x \in \mathbb{R} / x - 2 \leq -1\}$$

Représentation	Inégalité	Notation	Représentation	Inégalité	Notation
	$a \leq x \leq b$	$[a, b]$		$a \leq x$	$[a, +\infty[$
	$a < x < b$	$]a, b[$		$a < x$	$]a, +\infty[$
	$a \leq x < b$	$[a, b[$		$x < b$	$] -\infty, b[$
	$a < x \leq b$	$]a, b]$		$x \leq b$	$] -\infty, b]$

Activité 8 (Valeur absolue)

1. Calculez : $|-1|$; $|3^2|$; $|(-4)^2|$; $|-3|^2$; $|-4| - \frac{15}{2}$

2. Comparez : $\left|\frac{5}{4} - \frac{2}{3}\right|$ et $\left|\frac{2}{3} - \frac{5}{4}\right|$

3. a et b deux réels négatifs tels que $|a| < |b|$ que pouvez vous dire de a et b.

4. Traduisez à l'aide d'intervalles : $|x| \leq \frac{3}{2}$; $|x| \geq \frac{3}{2}$

- La valeur absolue d'un réel x , notée $|x|$, est le réel tel que: Si $x \geq 0$ alors $|x| = x$, et si $x \leq 0$ alors $|x| = -x$.
- Pour tout réel x , $|x| \geq 0$ et $|x| = 0$ équivaut à $x = 0$.
- Pour tout réel x , x et $|x|$ ont le même carré , $|x|^2 = x^2$
- Pour tout réel x , x et $-x$ ont même valeur absolue, $|-x| = |x|$
- Pour tous réels x et y , $|x - y| = |y - x|$.
- Pour tous réels x et y , $|xy| = |x| \cdot |y|$
- Pour tout réel x et pour tout réel non nul y , $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
- Pour tous réels x et y , $|x + y| \leq |x| + |y|$.

II. Corrigés des activités (bien assimiler mon cours)

Activité 1 (Opérations de base « calculs dans IR »)

1. $\frac{19}{25} + \frac{103}{25} = \frac{19+103}{25} = \frac{122}{25}$; $\frac{8}{3} + \frac{5}{18} = \frac{8 \times 6}{3 \times 6} + \frac{5}{18} = \frac{48+5}{18} = \frac{53}{18}$

2. $\frac{13}{5} - \frac{4}{5} = \frac{13-4}{5} = \frac{9}{5}$; $\frac{3}{5} - \frac{4}{3} = \frac{9}{15} - \frac{20}{15} = -\frac{11}{15}$

$$3. \quad \frac{8}{3} + \frac{5}{18} - \frac{4}{9} = \frac{48}{18} + \frac{5}{18} - \frac{8}{18} = \frac{53-8}{18} = \frac{45}{18} = \frac{5}{2} ; \quad \frac{8}{3} - \frac{5}{18} + \frac{4}{9} = \frac{43}{18} + \frac{8}{18} = \frac{51}{18} = \frac{17}{6}$$

$$4. \quad \frac{125}{52} \times \frac{44}{75} = \frac{125 \times 44}{52 \times 75} = \frac{5500}{3900} = \frac{55}{39}$$

$$5. \quad \frac{1}{\frac{23}{5}} = \frac{5}{23} ; \quad \frac{\frac{42}{5}}{\frac{-2}{15}} = -\frac{42}{5} \times \frac{15}{2} = -21 \times 3 = -63$$

Activité 2 (Calculs sous radicaux)

$$1. \quad A = \sqrt{8} + \sqrt{2} = \sqrt{4 \times 2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$B = (\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 = \sqrt{5}^2 + \sqrt{2}^2 + 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{5} = 7 + 2\sqrt{10}$$

$$C = \sqrt{\frac{625}{49}} = \sqrt{\frac{25^2}{7^2}} = \frac{25}{7}$$

$$2. \quad \text{Trouver dans chaque cas une écriture sans radical au dénominateur.}$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5}^2} = \frac{\sqrt{15}}{5} ;$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{3}-3} = \frac{\sqrt{3}+3}{(\sqrt{3}-3) \times (\sqrt{3}+3)} = \frac{\sqrt{3}+3}{3-9} = -\frac{\sqrt{3}+3}{6} ;$$

$$C = \frac{-7}{4\sqrt{2}} = -\frac{7 \times \sqrt{2}}{4\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = -\frac{7\sqrt{2}}{8} ;$$

$$D = \frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5}) \times (\sqrt{7}+\sqrt{5})} = \frac{7+\sqrt{35}+\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}$$

Activité 3 (Calculs avec des puissances)

$$x = \frac{(3^5)^7 \times 24}{3^9 \times 9^{13}} = \frac{3^{35} \times 3 \times 2^3}{3^9 \times 3^{26}} = \frac{3^{36} \times 2^3}{3^{35}} = 3^{36-35} \times 2^3 = 3 \times 8 = 24$$

$$y = \left(\frac{32}{256}\right)^{10} \times \left(\frac{64}{512}\right)^{-8} = \left(\frac{2^5}{2^8}\right)^{10} \times \left(\frac{2^6}{2^9}\right)^{-8} = (2^{-3})^{10} \times (2^{-3})^{-8} = 2^{-30} \times 2^{24} = 2^{-6} = \frac{1}{64}$$

$$z = (-1)^{2n+1} + (-1)^{32} + (-2)^3 \times 2^2 \times (-2)^{-4} = -1 + 1 - 2^5 \times 2^{-4} = -2$$

Activité 4 (Règles de calculs sur les puissances entières)

$$1. \quad A = 2^2 \times 3^3 = 4 \times 27 = 108 ; \quad B = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 8 \times 9 \times 5 = 360 ; \\ C = 2^4 \times 3^3 = 16 \times 27 = 432$$

$$2. \quad B = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1}{2^2} \times \frac{2^3}{3^3} = \frac{2^{3-2}}{3^3} = \frac{2}{27} ;$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{3 \times 4^2 \times 2^3}{4 \times 5^2 \times 5^3} = \frac{3 \times 2^5}{5^5} = \frac{96}{3125}.$$

Activité 5 (Nombres décimaux « Les puissances de dix »)

$$1. \quad A = (10^{-3})^2 = 10^{-6} ; \quad B = \frac{10^5}{10^{-2}} = 10^7 ; \quad C = \sqrt{10^{-4}} = 10^{-2}$$

$$2. \quad D = \frac{10^2 \times \left(\frac{1}{10}\right)^3}{\left(\frac{1}{1000}\right)^3 \times (10000)^{-5}} = \frac{10^{-1}}{10^{-9} \times 10^{-20}} = 10^{-1+9+20} = 10^{28}$$

$$3. \quad E = \frac{23}{40} = \frac{23}{2^3 \times 5} = \frac{23 \times 5^2}{2^3 \times 5^3} = \frac{23 \times 25}{10^3} = 575 \times 10^{-3}$$

$$F = \frac{42}{3200} = \frac{42}{2^5 \times 10^2} = \frac{42 \times 5^5}{10^7} = 131250 \times 10^{-7}.$$

Activité 6 (Comparaisons des nombres réels)

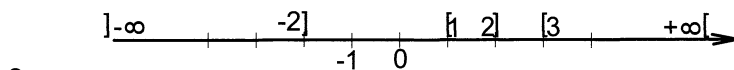
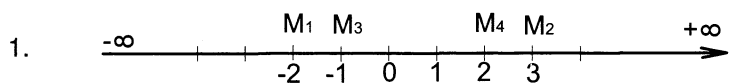
$$1. \quad \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\} ; \quad \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}$$

$$2. \quad a - b = \frac{1}{2} - \frac{7}{15} = \frac{15 - 14}{30} = \frac{1}{30} > 0 \text{ donc } a > b$$

$$a^2 - b^2 = 180 - 192 = -12 < 0 \text{ Donc } a^2 < b^2 \text{ or } a > 0 \text{ et } b > 0 \text{ d'où } a < b$$

$$a - b = 11 - 5\sqrt{5} < 0 \text{ car } 11^2 < (5\sqrt{5})^2 \text{ D'où } a < b$$

Activité 7 (Intervalles de IR)



3. $A =]-2, 5[$;

$$-\frac{1}{2} \leq x - 2 \leq \frac{1}{2} \text{ équivaut à : } -\frac{1}{2} + 2 \leq x \leq \frac{1}{2} + 2 \text{ équivaut à } \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$

$$\text{donc } B = \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right] ; x - 2 \leq -1 \text{ équivaut à : } x \leq 1 \text{ donc } C =]-\infty, 1]$$

Activité 8 (Valeur absolue)

1. $|-1| = 1$; $|3^2| = 9$; $|(-4)^2| = 16$; $|-3|^2 = 9$; $|-4| - \left| \frac{15}{2} \right| = 4 - \frac{15}{2} = \frac{8-15}{2} = -\frac{7}{2}$

2. $\left| \frac{5}{4} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{2}{3} - \frac{5}{4} \right|$ car $|a - b| = |b - a|$

3. a et b deux réels négatifs tels que $|a| < |b|$ donc $a > b$

4. $|x| \leq \frac{3}{2}$ équivaut à $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ donc $x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right]$;

$$|x| \geq \frac{3}{2} \text{ équivaut à } x \leq -\frac{3}{2} \text{ ou } x \geq \frac{3}{2} \text{ donc } x \in \left] -\infty, -\frac{3}{2} \right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty \right[$$

III. Exercices (je maîtrise mes connaissances)

Exercice 1

1. Parmi les rationnels suivants, quels sont les décimaux.

$$-0,0071 ; \frac{17}{125} ; \frac{45}{58} ; -\frac{409}{3} ; \frac{409}{2} ; \sqrt{29,16} ; \frac{17}{40}$$

2. Ecrivez plus simplement les réels.

$$A = \frac{3 - \frac{2}{5} + \frac{4}{3}}{2 + \frac{4}{5} - \frac{2}{3}} ; B = \frac{6 - \frac{5}{2} + \frac{3}{8}}{3 - \frac{5}{2} - \frac{7}{4}} ; C = \frac{1 - \frac{5}{3} - \frac{2}{2}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} \times \frac{6 + \frac{7}{3} - \frac{2}{5} + 1}{1 - \frac{5}{6} - \frac{2}{5} - 1}$$

Exercice 2

On donne deux réels non nuls a et b et on pose

$$X = (a^3 b^{-1})^2 \times (a^{-2} b^3)^{-2} \text{ et } Y = \frac{(ab^2)^{-3} (a^2 b^3)^2}{(a^{-2} b)^4 (a^3 b^{-2})^{-1}}$$

1. Simplifier X ; Y ; $\frac{X}{Y}$ et XY

2. Simplifier $A = \frac{X^2 Y}{XY^3}$

Exercice 3

1. Ecrire chacun des nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres entiers, b étant le plus petit possible : $\sqrt{50}$; $\sqrt{50} + \sqrt{72}$.
2. On considère les nombres : $C = 2\sqrt{27} - 2\sqrt{3} + \sqrt{12}$
 $D = \sqrt{75} + \sqrt{48} - 7\sqrt{3}$. Montrer, en détaillant le calcul, que $\frac{C}{D}$ est un nombre entier.
3. Sans utiliser les valeurs approchées, montrer que trois de ces nombres sont égaux $A = \sqrt{5} + \sqrt{5}$; $B = \frac{\sqrt{500}}{5}$; $C = 2\sqrt{5}\sqrt{5}$; $D = \sqrt{20}$; $E = \sqrt{5+5}$.

Exercice 4

On donne : $C = \sqrt{12}$ $D = \sqrt{27}$ $E = \sqrt{20}$

1. Exprimer C , D et E sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des nombres entiers, b étant le plus petit possible.
2. Calculer $C \times D$.
3. Calculer $C + D$ et $C \times E$, donner le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des nombres entiers, b étant le plus petit possible.

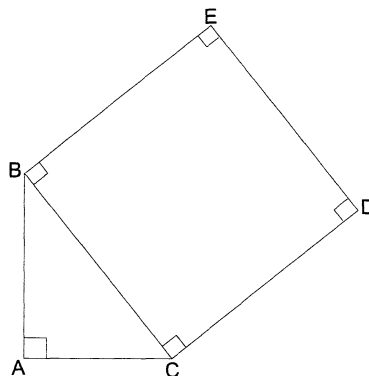
Exercice 5

Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur : ABC est un triangle rectangle en A tel que :

$$AB = \sqrt{2} + \sqrt{8} \text{ et } AC = \sqrt{18} ;$$

$BCDE$ est un rectangle tel que $CD = 5$.

1. Ecrire AB et CD sous forme $a\sqrt{b}$ où les lettres a et b désignent des nombres entiers, b étant le plus petit possible.
2. En déduire la nature du triangle ABC .
3. Calculer l'aire du rectangle $BCDE$.



Exercice 6

1. Comparer puis ranger par ordre croissant $2 - \sqrt{3}$; $\sqrt{2} - 1$; $\sqrt{5} - 2$
2. Effectuer : $(\sqrt{6} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$; $\sqrt{5 + \sqrt{3}} \times \sqrt{5 - \sqrt{3}}$
3. Soit $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Calculer $P(\sqrt{3})$; $P(-\sqrt{2})$; $P(\sqrt{2} + 1)$
4. Simplifier : $D = \sqrt{\frac{16}{20}} - \sqrt{\frac{125}{49}} + 2\sqrt{20}$
5. Ecrire à l'aide d'un seul radical $A = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$; $B = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$

Exercice 7

Soient deux réels a et b . Encadrer $a + b$, $a - b$, $b - a$, ab , $\frac{1}{b}$ et $\frac{a}{b}$ dans les cas suivants :

- $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$ et $2 \leq b \leq 3$
- $-\frac{3}{2} \leq a \leq -\frac{1}{2}$ et $-3 \leq b \leq -2$
- $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$ et $-3 \leq b \leq -2$

Exercice 8

1. Sachant que $x \in \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right[$ Encadrer les expressions suivantes.

$$f(x) = 2x + 5 ; g(x) = -3x + 2$$

2. Sachant que $x \in \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right[$ Encadrer les expressions suivantes.

$$f(x) = x^2 ; g(x) = x^2 + x + 3 ; h(x) = -x^2 + x + 1$$

3. Sachant que $x \in \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right[$ Encadrer les expressions suivantes.

$$f(x) = \frac{1}{2+x} ; g(x) = \frac{3}{1+x^2}$$

Exercice 9

Déterminer $E \cap F$ et $E \cup F$ dans les cas suivants :

1. $E = [-1, 7]$ et $F =]0, 10]$
2. $E =]-2, 1] \cup]3, 5[$ et $F =]0, 4[$
3. $E =]-\infty, 4]$ et $F = [2, +\infty[$

Exercice 10

1. Ecrire sans utiliser la valeur absolue les expressions :

$$f(x) = |x + 4| ; g(x) = \sqrt{(x + 3)^2} + |x - 5|$$

2. Ecrire à l'aide d'intervalles les ensembles :

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tel que } |x - 2| < \frac{1}{2} \right\}.$$

$$B = \{ x \in \mathbb{R} \text{ tel que } |2x - 5| \leq 7 \}.$$

$$C = \{ x \in \mathbb{R} \text{ tel que } |2x + 1| > 5 \}.$$

IV. Corrigés des exercices (je maîtrise mes connaissances)

Exercice 1

1. $-0,0071 = -71 \times 10^{-4}$ donc $-0,0071$ est un décimal.

$$\frac{17}{125} = \frac{17 \times 4}{1000} = 68 \times 10^{-3} \text{ donc } \frac{17}{125} \text{ est un décimal.}$$

$-\frac{409}{3}$ n'est pas un décimal car le dénominateur ne peut pas s'écrire sous

forme d'un produit de puissances de 2 et de puissances de 5.

$$\frac{409}{2} = \frac{409 \times 5}{10} = \frac{2045}{10} = 204,5 \times 10^{-1} \text{ donc } \frac{409}{2} \text{ est un décimal.}$$

$$\sqrt{29,16} = 5,4 = 54 \times 10^{-1} \text{ d'où } \sqrt{29,16} \text{ est un décimal.}$$

$$\frac{17}{40} = \frac{17}{2^3 \times 5} = \frac{17 \times 25}{10^3} = 425 \times 10^{-3} \text{ donc } \frac{17}{40} \text{ est un décimal.}$$

$$2. \quad A = \frac{3 - \frac{2}{5} + \frac{4}{3}}{2 + \frac{4}{5} - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{45 - 6 + 20}{15}}{\frac{30 + 12 - 10}{15}} = \frac{59}{32}; \quad B = \frac{6 - \frac{5}{2} + \frac{3}{8}}{3 - \frac{5}{2} - \frac{7}{4}} = \frac{\frac{48 - 20 + 3}{8}}{\frac{12 - 10 - 7}{8}} = -\frac{31}{5}$$

$$C = \frac{\frac{1}{3} - \frac{5}{2}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} \times \frac{\frac{6}{7} + \frac{7}{3}}{1 - \frac{5}{6}} \times \frac{-\frac{2}{5} + 1}{\frac{2}{5} - 1} = -\frac{13}{6} \times \frac{67}{1} \times \frac{3}{-3} = \frac{13 \times 8}{6} \times \frac{67 \times 6}{21} = \frac{13 \times 8 \times 67}{21} = 331,8$$

Exercice 2

$$1. \quad X = (a^3 b^{-1})^2 \times (a^{-2} b^3)^{-2} = a^6 b^{-2} a^4 b^{-6} = a^{10} b^{-8}$$

$$Y = \frac{(ab^2)^{-3} (a^2 b^3)^2}{(a^{-2} b)^4 (a^3 b^{-2})^{-1}} = \frac{a^{-3} b^{-6} a^4 b^6}{a^{-8} b^4 a^{-3} b^2} = \frac{a}{a^{-11} b^6} = a^{12} b^{-6}$$

$$\frac{X}{Y} = \frac{a^{10} b^{-8}}{a^{12} b^{-6}} = a^{-2} b^{-2}$$

$$XY = (a^{10} b^{-8}) (a^{12} b^{-6}) = a^{22} b^{-14} = \frac{a^{22}}{b^{14}}$$

$$2. \quad A = \frac{X^2 Y}{XY^3} = \frac{X}{Y^2} = \frac{a^{10} b^{-8}}{(a^{12} b^{-6})^2} = \frac{a^{10} b^{-8}}{a^{24} b^{-12}} = a^{-14} b^4 = \frac{b^4}{a^{14}}$$

Exercice 3

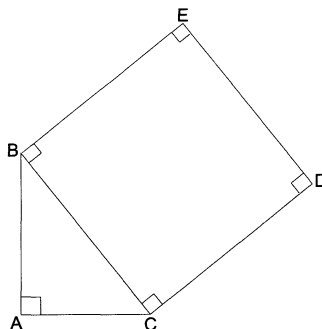
- $\sqrt{72} = \sqrt{9 \times 8} = \sqrt{3^2 \times 2^3} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{2}$
 $\sqrt{50} + \sqrt{72} = 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$
- $C = 2\sqrt{27} - 2\sqrt{3} + \sqrt{12} = 2\sqrt{3^2 \times 3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2^2 \times 3} = 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$
 $D = \sqrt{75} + \sqrt{48} - 7\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \times 3} + \sqrt{4^2 \times 3} - 7\sqrt{3} = 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
 $\frac{C}{D} = \frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 3$ donc $\frac{C}{D}$ est un entier
- $A = \sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$; $B = \frac{\sqrt{500}}{5} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$; $C = 2\sqrt{5}\sqrt{5} = 2 \times 5 = 10$;
 $D = \sqrt{20} = \sqrt{2^2 \times 5} = 2\sqrt{5}$; $E = \sqrt{5+5} = \sqrt{10} = \sqrt{2} \times \sqrt{5}$.
 Donc $A = B = D$

Exercice 4

- $C = \sqrt{12}$ $D = \sqrt{27}$ $E = \sqrt{20}$
- $C = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$; $D = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ et $E = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
 - $C \times D = 2\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} = 6 \times 3 = 18$
 - $C + D = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ et $C \times E = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{15}$

Exercice 5

- $AB = \sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
 $AC = \sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$
- $AB = AC$ donc le triangle ABC est isocèle de sommet principal A .
- D'après le théorème de Pythagore on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 36$ donc $BC = 6$ ce qui donne l'aire du rectangle BCDE est : $6 \times 5 = 30 \text{ cm}^2$



Exercice 6

- Si on pose $A = 2 - \sqrt{3}$, $B = \sqrt{2} - 1$ et $C = \sqrt{5} - 2$. Pour comparer A , B et C on calcule leurs différences deux à deux . $A - B = 3 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})$, puisque $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) > 3$ car une valeur approchée par défaut de $(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ est 3,14 donc $A - B < 0$ d'où $A < B$.

$A - C = 2 - \sqrt{3} - \sqrt{5} + 2 = 4 - (\sqrt{3} + \sqrt{5}) > 0$ car une valeur approchée par excès de $(\sqrt{3} + \sqrt{5})$ est 3,98 donc $A > C$. On a : $C < A$ et $A < B$ donc $C < B$ et par suite $\sqrt{5} - 2 < 2 - \sqrt{3} < \sqrt{2} - 1$.

$$2. (\sqrt{6} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{18} - \sqrt{12} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{5 + \sqrt{3}} \times \sqrt{5 - \sqrt{3}} = \sqrt{(5 + \sqrt{3})(5 - \sqrt{3})} = \sqrt{25 - 3} = \sqrt{22}.$$

$$3. P(\sqrt{3}) = \sqrt{3}^3 + \sqrt{3}^2 + \sqrt{3} + 1 = 3\sqrt{3} + 3 + \sqrt{3} + 1 = 4\sqrt{3} + 4 = 4(\sqrt{3} + 1)$$

$$P(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} + 1 = -3\sqrt{2} + 3 = 3(1 - \sqrt{2})$$

$$P(\sqrt{2} + 1) = (\sqrt{2} + 1)^3 + (\sqrt{2} + 1)^2 + (\sqrt{2} + 1) + 1$$

$$= (\sqrt{2} + 1)(3 + 2\sqrt{2}) + 3 + 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 1 + 1$$

$$= 3\sqrt{2} + 4 + 3 + 2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 1 + 1 = 8\sqrt{2} + 12 = 4(2\sqrt{2} + 3)$$

$$= 4(\sqrt{2} + 1)^2$$

$$4. D = \sqrt{\frac{16}{20}} - \sqrt{\frac{125}{49}} + 2\sqrt{20} = \frac{4}{2\sqrt{5}} - \frac{5\sqrt{5}}{7} + 4\sqrt{5} = \frac{28 - 50 + 280}{14\sqrt{5}} = \frac{129\sqrt{5}}{35}$$

5. En appliquant les identités remarquables $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad 7 + 4\sqrt{3} = \sqrt{3}^2 + 2 \times \sqrt{3} \times 2 + 4 = (\sqrt{3} + 2)^2 \text{ et}$$

$$3 - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}^2 - 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2} - 1)^2 \text{ on aura : } A = \sqrt{(\sqrt{3} + 2)^2} = \sqrt{3} + 2 \text{ et}$$

$$B = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{2} - 1.$$

Exercice 7

- * $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$ et $2 \leq b \leq 3$ donne $\frac{1}{2} + 2 \leq a + b \leq \frac{3}{2} + 3$ donne $\frac{5}{2} \leq a + b \leq \frac{9}{2}$
- * $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$ et $2 \leq b \leq 3$ donne $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$ et $-3 \leq -b \leq -2$ d'ou
- $\frac{1}{2} - 3 \leq a - b \leq \frac{3}{2} - 2$ d'ou $-\frac{5}{2} \leq a - b \leq -\frac{1}{2}$
- * $-\frac{5}{2} \leq a - b \leq -\frac{1}{2}$ donne $\frac{1}{2} \leq b - a \leq \frac{5}{2}$.

* $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$ et $2 \leq b \leq 3$. Les bornes des égalités sont positifs donc :

$$\frac{1}{2} \times 2 \leq ab \leq \frac{3}{2} \times 3 \text{ donne } 1 \leq ab \leq \frac{9}{2}$$

* $2 \leq b \leq 3$ donc $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}$

* $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$ et $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}$ donne $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}$ donne $\frac{1}{6} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{3}{4}$

* $-\frac{3}{2} \leq a \leq -\frac{1}{2}$ et $-3 \leq b \leq -2$ donne $-\frac{3}{2} - 3 \leq a + b \leq -\frac{1}{2} - 2$ donne
 $-\frac{9}{2} \leq a + b \leq -\frac{5}{2}$

* $-\frac{3}{2} \leq a \leq -\frac{1}{2}$ et $2 \leq -b \leq 3$ donc $-\frac{3}{2} + 2 \leq a - b \leq -\frac{1}{2} + 3$ donne
 $\frac{1}{2} \leq a - b \leq \frac{5}{2}$.

* $\frac{1}{2} \leq a - b \leq \frac{5}{2}$ donne $-\frac{5}{2} \leq b - a \leq -\frac{1}{2}$

* $-\frac{3}{2} \leq a \leq -\frac{1}{2}$ et $-3 \leq b \leq -2$ donne $\left(-\frac{1}{2}\right) \times (-2) \leq ab \leq \left(-\frac{3}{2}\right) \times (-3)$
donc $1 \leq ab \leq \frac{9}{2}$

* $-3 \leq b \leq -2$ donc $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{b} \leq -\frac{1}{3}$

* $-\frac{3}{2} \leq a \leq -\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{b} \leq -\frac{1}{3}$ donc

$$\left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \leq \frac{a}{b} \leq \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \text{ donc } \frac{1}{6} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{3}{4}$$

* $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$ et $-3 \leq b \leq -2$ donne $\frac{1}{2} - 3 \leq a + b \leq \frac{3}{2} - 2$ donc
 $-\frac{5}{2} \leq a + b \leq -\frac{1}{2}$

* $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$ et $2 \leq -b \leq 3$ donne $\frac{5}{2} \leq a - b \leq \frac{9}{2}$

* $\frac{5}{2} \leq a - b \leq \frac{9}{2}$ donc $-\frac{9}{2} \leq b - a \leq -\frac{5}{2}$

$$* \frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2} \text{ et } -3 \leq b \leq -2 \text{ donne } -\frac{9}{2} \leq ab \leq -1 \quad * \quad -3 \leq b \leq -2 \text{ donc } -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{b} \leq -\frac{1}{3}$$

$$* \frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2} \text{ et } -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{b} \leq -\frac{1}{3} \text{ donne } -\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \leq \frac{a}{b} \leq -\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } -\frac{3}{4} \leq \frac{a}{b} \leq -\frac{1}{6}$$

Exercice 8

$$1. \quad * \quad x \in \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right[\text{ donne } \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \text{ donne } 1 < 2x < 3 \text{ donc } 6 < 2x + 5 < 8$$

$$\text{donc } 6 < f(x) < 8$$

$$* \quad x \in \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right[\text{ donne } \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \text{ donne } -\frac{9}{2} < -3x < -\frac{3}{2} \text{ donc}$$

$$-\frac{9}{2} + 2 < -3x + 2 < -\frac{3}{2} + 2 \text{ donc } -\frac{5}{2} < g(x) < \frac{1}{2}$$

$$2. \quad * \quad x \in \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right[\text{ donne } \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \text{ donne } \frac{1}{4} < x^2 < \frac{9}{4} \text{ donc } \frac{1}{4} < f(x) < \frac{9}{4}$$

$$* \quad \frac{1}{4} < x^2 < \frac{9}{4} \text{ et } \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \text{ donne}$$

$$\frac{3}{4} < x^2 + x < \frac{15}{4} \text{ donc } \frac{3}{4} + 3 < x^2 + x + 3 < \frac{15}{4} + 3 \text{ donc } \frac{15}{4} < g(x) < \frac{27}{4}$$

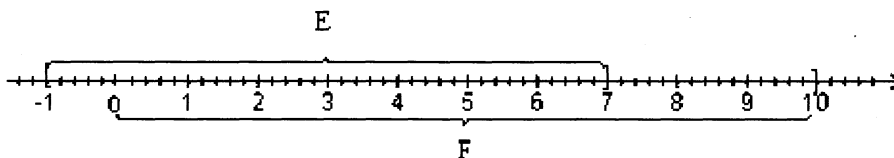
$$* \quad \frac{1}{4} < x^2 < \frac{9}{4} \text{ donne } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1 < x^2 + x + 1 < \frac{9}{4} + \frac{3}{2} + 1 \text{ donc } \frac{7}{4} < h(x) < \frac{19}{4}$$

$$3. \quad * \quad \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \text{ donne } \frac{5}{2} < 2 + x < \frac{7}{2} \text{ donc } \frac{2}{7} < \frac{1}{x+2} < \frac{2}{5} \text{ donc } \frac{2}{7} < f(x) < \frac{2}{5}$$

$$* \quad \frac{1}{4} < x^2 < \frac{9}{4} \text{ donne } \frac{5}{4} < x^2 + 1 < \frac{13}{4} \text{ donc } \frac{4}{13} < \frac{1}{x^2+1} < \frac{4}{5} \text{ donc } \frac{4}{13} < g(x) < \frac{4}{5}$$

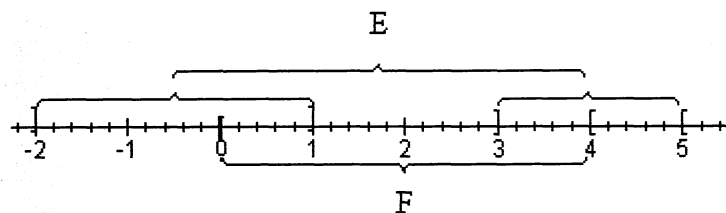
Exercice 9

$$1. \quad E = [-1, 7] \text{ et } F =]0, 10]$$



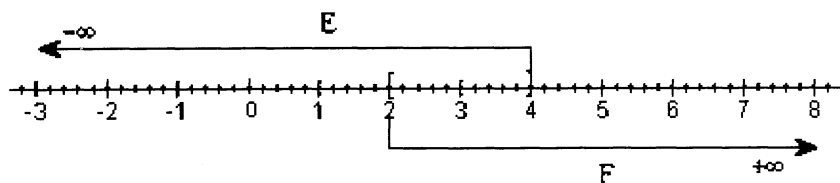
$$E \cap F =]0, 7] \text{ et } E \cup F = [-1, 10]$$

2. $E =]-2, 1] \cup]3, 5[$ et $F =]0, 4[$



$E \cap F =]0, 1] \cup]3, 4[$ et $E \cup F =]-2, 5[$

3. $E =]-\infty, 4]$ et $F = [2, +\infty[$



$E \cap F = [2, 4]$ et $E \cup F =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

Exercice 10

1. $f(x) = |x + 4|$, $x + 4$ est positif sur $[-4, +\infty[$ et négatif sur $]-\infty, -4]$ donc

$f(x) = \begin{cases} -x - 4 & \text{si } x \in]-\infty, -4] \\ x + 4 & \text{si } x \in [-4, +\infty[\end{cases}$; $g(x) = \sqrt{(x+3)^2} + |x-5| = |x+3| + |x-5|$ le

tableau suivant permet de connaître le signe et l'expression de $g(x)$.

x	$-\infty$	-3	5	$+\infty$
$x+3$	-	0	+	+
$x-5$	-	-	0	+
$ x+3 $	$-x-3$	$x+3$	$x+3$	$x+3$
$ x-5 $	$-x+5$	$-x+5$	$x-5$	$x-5$
$g(x)$	$-2x+2$	8	$2x-2$	$2x-2$

$g(x) = \begin{cases} -2x+2 & \text{si } x \in]-\infty, -3] \\ 8 & \text{si } x \in [-3, 5] \\ 2x-2 & \text{si } x \in [5, +\infty[\end{cases}$

$$2. \quad A = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tel que } |x - 2| < \frac{1}{2} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2} \right\} \text{ donc}$$

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tel que } -\frac{1}{2} < x - 2 < \frac{1}{2} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tel que } -\frac{1}{2} + 2 < x < \frac{1}{2} + 2 \right\}$$

$$= \left] \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right[.$$

$$B = \{ x \in \mathbb{R} \text{ tel que } |2x - 5| \leq 7 \} = \{ x \in \mathbb{R} / -7 \leq 2x - 5 \leq 7 \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} \text{ tel que } -2 \leq 2x \leq 12 \} = \{ x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 6 \} = [-1, 6]$$

$$C = \{ x \in \mathbb{R} \text{ tel que } |2x + 1| > 5 \}, \quad x \in C, \text{ équivaut à } |2x + 1| > 5 \text{ donc}$$

$$2x + 1 > 5 \text{ ou } 2x + 1 < -5, \text{ équivaut à } 2x > 4 \text{ ou } 2x < -6 \text{ donc } x > 2 \text{ ou } x < -3$$

$$\text{et par suite } C =]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[$$

Devoir de contrôle N° 1 – 1

Exercice 1

1. Déterminer le réel x pour que l'entier $132x$ soit divisible par 4.
2. déterminer les entiers naturels a et b pour que le nombre $3a7b$ soit divisible par 3 et par 5.
3. a) déterminer le PGCD (144, 196) et le PPCM (144 , 196)
b) Rendre irréductible la fraction $\frac{196}{144}$.
4. Trouver les entiers naturels n pour que Le PGCD (200 , n) = n .

Exercice 2

Soit \mathcal{C} un cercle de centre O et de diamètre $[BC]$, A un point de \mathcal{C} distinct de B et C .

1. La bissectrice de l'angle (\widehat{ABC}) recoupe \mathcal{C} en D .
 - a. Comparer les angles \widehat{DAC} et \widehat{DBC} , puis \widehat{ACD} et \widehat{ABD} .
 - b. En déduire que le triangle ADC est isocèle.
2. La parallèle à (DC) passant par A recoupe \mathcal{C} en M . Montrer que $[AC]$ est la bissectrice de l'angle \widehat{DAM} .

Devoir de contrôle N° 1- 2

Exercice 1

1. Soit a, b, c et d quatre réels multiples de 3. Montrer que le produit $a \times b \times c \times d$ est divisible par 81.
2. a) décomposer en produit de facteurs premiers les entiers 124, 315, 156.
b) Calculer le PGCD (124, 315). Que peut on dire de 124 et 315.
Calculer alors le PPCM (124, 315).

3. a) Simplifier les expressions : $A = \frac{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}{\frac{1}{2}}$; $B = \frac{\frac{\sqrt{2}+1}{1-\frac{1}{3}}}{1+\frac{1}{3}}$.

- b) Dédire que A et B sont inverses.

Exercice 2

Soit un triangle ABC rectangle en A tel que $BC = 6$ et $\widehat{ABC} = 30^\circ$. On désigne par \mathcal{C} le cercle circonscrit à ce triangle et par O le centre de \mathcal{C} . La droite parallèle à (AC) passant par O coupe le cercle \mathcal{C} en un point D appartenant à l'arc (\widehat{BC}) qui contient A.

1. Montrer que [CD) est la bissectrice de l'angle \widehat{ACB} .
2. Calculer \widehat{OAB} , \widehat{CDO} et \widehat{ADC} .
3. Montrer que le triangle AOC est équilatéral.
4. Dédire que les droites (BD) et (AO) sont parallèles.

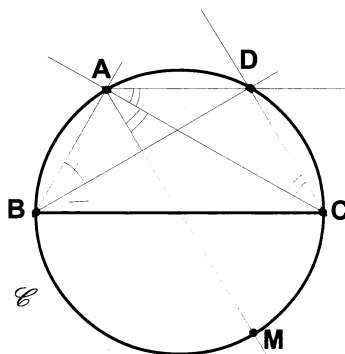
Corrigé du devoir de contrôle N° 1- 1

Exercice 1

1. L'entier $132x$ est divisible par 4 si le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 4. Donc le nombre formé par les deux derniers chiffres ne peut être que : 20 ; 24 ; 28 d'où $x = 0$ où $x = 4$ où $x = 8$.
2. Le nombre $3a7b$ est divisible par 3 et par 5 signifie que la somme $3 + a + 7 + b$ soit divisible par 3 et que le chiffre des unités ne peut être que 0 ou 9. Donc si $b = 0$ on aura $a + 10$ soit divisible par 3 ce qui donne $a = 2$ ou $a = 5$ ou $a = 8$. Si $b = 5$ on aura $a + 15$ soit divisible par 3 donne $a = 0$ où $a = 3$ où $a = 6$ où $a = 9$.
3. a. $144 = 2^4 \times 3^2$ et $196 = 2^2 \times 7^2$ donc $\text{PGCD}(144, 196) = 2^2 = 4$ et $\text{PPCM}(196, 144) = 2^4 \times 3^2 \times 7^2 = 7056$.
b. $\frac{196}{144} = \frac{7^2}{2^2 \times 3^2} = \frac{49}{36}$.
4. Pour que le $\text{PGCD}(200, n) = n$, il faut que n soit un diviseur de 200 donc $n \in \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 200\}$

Exercice 2

1. a. Les quatre points D, A, C et B sont sur un même cercle \mathcal{C} et \widehat{DAC} et \widehat{DBC} deux angles inscrits qui interceptent le même arc \widehat{DC} donc $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$. De même on a : \widehat{ACD} et \widehat{ABD} deux angles inscrits qui interceptent le même arc \widehat{AD} donc $\widehat{ACD} = \widehat{ABD}$.



- b. On a : $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$ et $\widehat{DBC} = \widehat{ACD}$ donc $\widehat{DAC} = \widehat{ACD}$ et par suite le triangle DAC est isocèle de sommet principal D.
2. (AM) et (DC) sont deux droites parallèles coupées par la sécante (AC). Donc les angles alternes internes \widehat{ACD} et \widehat{CAM} sont égaux, or $\widehat{ACD} = \widehat{DAC}$ donc \widehat{DAC} et \widehat{CAM} sont égaux. Ce qui donne que [AC) est la bissectrice de l'angle \widehat{DAM} .

Corrigé du devoir de contrôle N° 1-2

Exercice N° 1

1. Les entiers a, b, c et d sont divisibles par 3 donc il existe quatre entiers p_1, p_2, p_3 et p_4 tels que $a = 3p_1, b = 3p_2, c = 3p_3$ et $d = 3p_4$ ce que donne que le produit $a \times b \times c \times d = 3^4(p_1 p_2 p_3 p_4)$. Si on pose que $p_1 p_2 p_3 p_4 = p$, on aura : $a \times b \times c \times d = 81 \times p$ donc le produit $a \times b \times c \times d$ est divisible par 81.
2. a. $124 = 2^2 \times 31, 315 = 3^2 \times 5 \times 7$ et $= 2^2 \times 3 \times 13$.
b. Le $\text{PGCD}(124, 315) = 1$ donc les entiers 124 et 315 sont premiers entre eux, ce qui donne que $\text{PPCM}(124, 315) = 124 \times 315 = 39060$.
3. $A = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \times 2 = \sqrt{2}-1, B = \frac{\sqrt{2}+1}{\frac{2}{3}} \times \frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \times 2 \times \frac{2 \times 3}{4} = \sqrt{2}+1$. Pour

montrer que A et B sont inverses on calcule A.B, on aura donc

$$AB = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = \sqrt{2}^2 - 1 = 2 - 1 = 1 \text{ donc A et B sont inverses.}$$

Exercice N°2

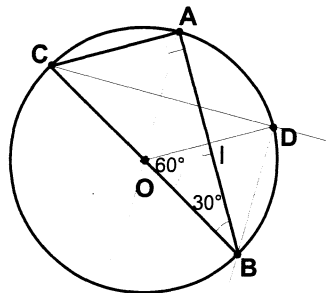
1. On désigne par I le point d'intersection des droites (OD) et (AB), puisque (OD) // (AC) et le triangle ABC rectangle en A donc le triangle OIB est rectangle en I, ce qui donne $\widehat{BOI} = \widehat{BOD} = 60^\circ$. On a, d'autre part, \widehat{BCD} est angle inscrit qui intercepte l'arc \widehat{BD} , \widehat{BOD} est un angle au centre qui intercepte le même arc \widehat{BD} donc

$$\widehat{BCD} = \frac{1}{2} \widehat{BOD} = 30^\circ. \text{ Or on a : } \widehat{BCA} \text{ le complémentaire de } \widehat{ABC} \text{ c'est-à-dire}$$

$$\widehat{BCA} = 60^\circ. \widehat{BCD} = \frac{1}{2} \widehat{BOD} = 30^\circ \text{ donc } \widehat{DCA} = 30^\circ \text{ d'où } \widehat{DCA} = \widehat{BCD}$$

[CD] est la bissectrice de \widehat{ACB} .

2. On a : $\widehat{BOA} = 2\widehat{BCA} = 120^\circ$, le triangle OAB est isocèle en O donc $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = 30^\circ$. De même le triangle OCD est isocèle en O donc $\widehat{CDO} = \widehat{OCD} = 30^\circ$. $\widehat{ADC} = \widehat{ABC} = 30^\circ$ (deux angles inscrits interceptent le même arc \widehat{AC})



3. Le triangle OAC est isocèle en O et $\widehat{OAC} = 60^\circ$ donc $\widehat{AOC} = 60^\circ$ par conséquence le triangle OAC est équilatéral.
4. Le triangle OBD est isocèle en O et $\widehat{BOD} = 60^\circ$ donc il est équilatéral d'où $\widehat{OBD} = 60^\circ$. Les angles \widehat{OBD} et \widehat{AOC} sont égaux et correspondants déterminés par les droites (OA) , (BD) et la sécante (BC) ce que donne que (BD) et (OA) sont parallèles.

Rapports trigonométriques d'un angle aigu

Relations métriques dans un triangle rectangle

I. Activités pour bien assimiler mon cours

Activité 1 (Théorème de Pythagore)

On considère un triangle ABC rectangle en A tel que $BC = 12$ et $AB = 8$

1. Calculer AC .
2. Soit I milieu du segment [BC] calculer AI.

**Si un triangle ABC est rectangle en A ,
alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$**

Activité 2 (Réciproque du Théorème de Pythagore)

1. Construire un triangle MNP tel que :
 $PN = 13\text{cm}$; $PM = 5\text{cm}$; $MN = 12\text{ cm}$.
2. Montrer que le triangle MNP est rectangle en M.

**Si un triangle ABC tel que l'on ait $AB^2 + AC^2 = BC^2$
Alors ce triangle est rectangle en A.**

Activité 3 (Relations métriques dans un triangle rectangle)

On considère un triangle ABC rectangle en A . H le projeté orthogonal de A sur (BC) on donne $AB = 3$ $AC = 4$.

1. Calculer BC .
2. Calculer CH ; BH et AH.

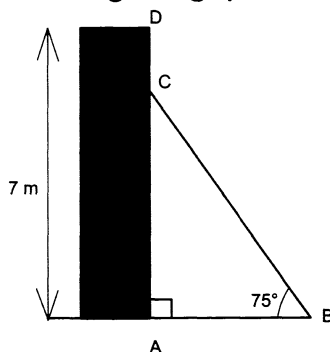
Si un triangle ABC est rectangle en A , H le projeté orthogonal de A sur (BC). Alors on a :

- $BA^2 = BH.BC$
- $CA^2 = CH.CB$
- $AB.AC = AH.BC$
- $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

Activité 4 (Rapports trigonométriques d'un angle aigu)

Une échelle de 6 mètres est appuyée contre un mur vertical de 7 mètres de haut. Par mesure de sécurité, on estime que l'angle que fait l'échelle avec le sol doit être de 75° (voir schéma ci-contre).

1. Calculer la distance AB entre le pied de l'échelle et le mur (on donnera le résultat arrondi au centimètre).
2. A quelle distance CD du sommet du mur se trouve le haut de l'échelle ? (on donnera le résultat arrondi au centimètre)



$\cos(\hat{B}) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}}$
 $\sin(\hat{B}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}}$
 $\text{tg}(\hat{B}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$

Activité 5 (Relations fondamentales)

Un angle aigu a tel que $\text{tg}(a) = 2$.

1. calculer $\cos(a)$ et $\sin(a)$
2. Vérifier que $1 + \text{tg}^2(a) = \frac{1}{\cos^2(a)}$

Pour tout angle aigu a on a :

- $\text{tg}(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$
- $(\cos(a))^2 + (\sin(a))^2 = 1$

Activité 6 (angles remarquables et angles complémentaires)

On considère un triangle équilatéral ABC de côté a . H le milieu du segment [BC].

1. Calculer AH. Dédire $\cos(60^\circ)$, $\sin(60^\circ)$, $\operatorname{tg}(60^\circ)$
2. Calculer $\cos(30^\circ)$, $\sin(30^\circ)$, $\operatorname{tg}(30^\circ)$
3. Comment choisir le triangle ABC pour calculer : $\cos(45^\circ)$, $\sin(45^\circ)$, $\operatorname{tg}(45^\circ)$

Pour tout angle aigu a on a :

- $\cos(90^\circ - a) = \sin(a)$
- $\sin(90^\circ - a) = \cos(a)$

Angle a	30°	45°	60°
$\cos(a)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\sin(a)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg}(a)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

II. Corrigés des activités (bien assimiler mon cours)

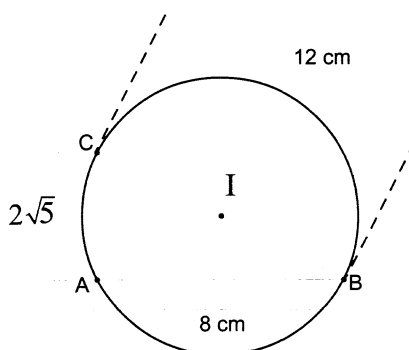
Activité 1

On considère un triangle ABC rectangle en A tel que
 $BC = 12$ et $AB = 8$

1. ABC un triangle rectangle en A donc d'après le théorème de Pythagore on a : $AB^2 + AC^2 = BC^2$
donc $AC^2 = BC^2 - AB^2$ d'où
 $AC^2 = 144 - 64 = 80$
donc $AC = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

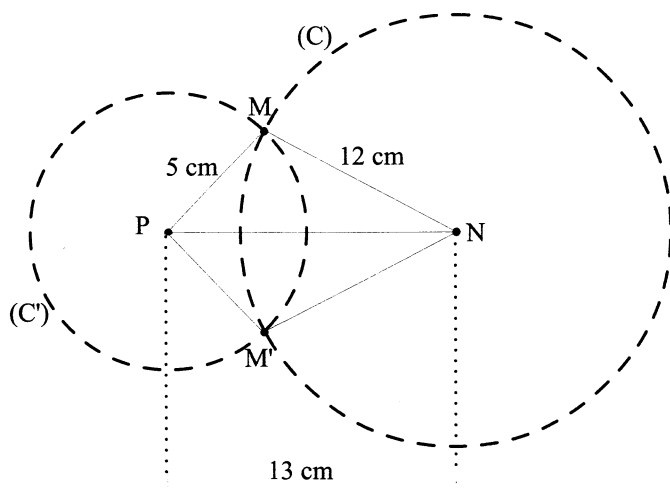
2. Soit I milieu du segment [BC]
calculer AI :

Puisque ABC est rectangle en A donc il est inscrit dans le cercle de diamètre [BC] or $I = B \cdot C$ donc $IA = IB = IC = 6$.



Activité 2

1. On construit un segment [PN] de longueur 13 cm puis le cercle (C) de centre P et de rayon 5 cm. Le cercle (C') de centre N et de rayon 12 cm coupe le cercle (C) en deux points M et M' on obtient donc deux triangles MNP et M'NP qui répondent à la question.
2. En appliquant la réciproque du Théorème de Pythagore : On obtient $MP^2 + MN^2 = 25 + 144 = 169$ et $MN^2 = 13^2 = 169$ c'est-à-dire que $MP^2 + MN^2 = MN^2$ d'où le triangle MNP est rectangle en M.



Activité 3

1. D'après le théorème de Pythagore
on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9 + 16 = 25$ donc
 $BC = 5$.

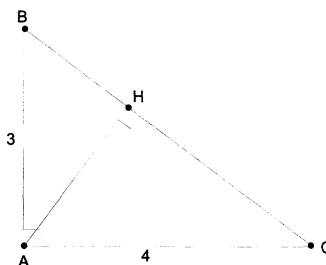
2. La relation : $AC^2 = CH.CB$ donne

$$CH = \frac{AC^2}{CB} = \frac{16}{5} = 3,2 ;$$

La relation $AB^2 = BH.BC$ donne

$$BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{9}{5} = 1,8 \text{ et la relation : } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \text{ donne}$$

$$AH^2 = \frac{1}{\frac{AC^2 + AB^2}{(AB.AC)^2}} = \frac{(AB.AC)^2}{AC^2 + AB^2} \text{ donc } AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5} = 2,4.$$



Activité 4

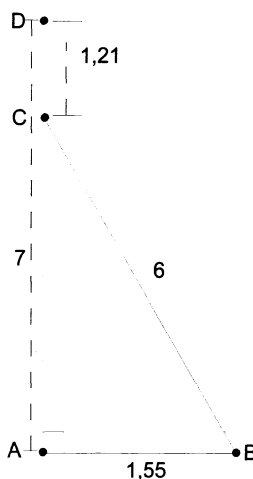
1. On a : $BC = 6$ et $\hat{A}BC = 75^\circ$, le triangle ABC est rectangle en A donc

$$\cos(\hat{A}BC) = \frac{AB}{BC} \text{ donne } AB = BC \times \cos(\hat{A}BC)$$

$$\text{donc } AB = 6 \cdot \cos(75^\circ) = 1,55 \text{ m}$$

2. $\sin(\hat{A}BC) = \frac{AC}{BC}$ donne $AC = BC \times \sin(\hat{A}BC)$

$$\text{donc } AC = 6 \cdot \sin(75^\circ) \text{ donc } AC = 5,79 \text{ et par suite } CD = AD - AC = 7 - 5,79 = 1,21$$



Activité 5

1. De la relation $\text{tg}(a) = 2$, on aura :

$$\frac{\sin(a)}{\cos(a)} = 2 \text{ donne } \sin(a) = 2\cos(a) \text{ d'où } 4\cos^2(a) + \cos^2(a) = 1 \text{ ce que donne}$$

$$5\cos^2(a) = 1 \text{ donc } \cos(a) = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ et } \sin(a) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$2. \quad 1 + \text{tg}^2(a) = 1 + 4 = 5 ; \quad \frac{1}{\cos^2(a)} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{25}{5} = 5 \text{ donc } 1 + \text{tg}^2(a) = \frac{1}{\cos^2(a)}$$

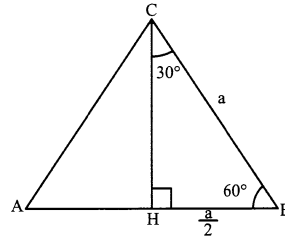
Activité 6

1. Le triangle CHB est rectangle en H donc d'après le théorème de Pythagore on a : $CH^2 + HB^2 = BC^2$ donc $CH^2 = BC^2 - HB^2$ d'où

$$CH^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \text{ et par suite } CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos(60^\circ) = \frac{HB}{BC} = \frac{1}{2} ; \sin(60^\circ) = \frac{HC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} ;$$

$$\operatorname{tg}(60^\circ) = \frac{HC}{HB} = \sqrt{3}$$



2. $\cos(30^\circ) = \cos(90^\circ - 60^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\sin(30^\circ) = \sin(90^\circ - 60^\circ) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}, \operatorname{tg}(30^\circ) = \frac{\sin(30^\circ)}{\cos(30^\circ)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3. Si le triangle ABC est rectangle et isocèle en A

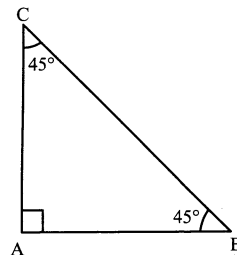
alors $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 45^\circ$. Si on désigne par a la longueur du côté [AB] alors

$BC^2 = 2a^2$ d'où $BC = a\sqrt{2}$ et par suite :

$$\cos(45^\circ) = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\sin(45^\circ) = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\operatorname{tg}(45^\circ) = \frac{\sin(45^\circ)}{\cos(45^\circ)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$



III. Exercices (je maîtrise mes connaissances)

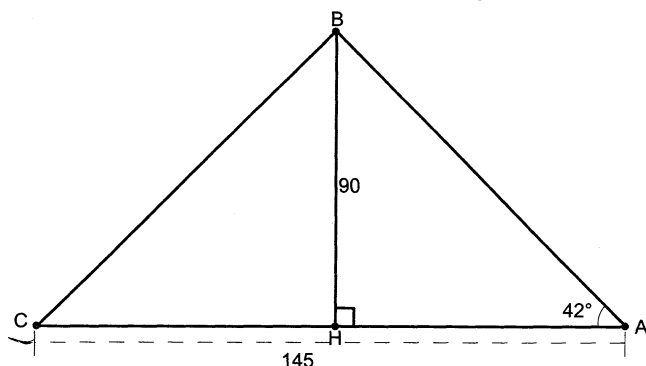
Exercice 1

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 4,8$ et $AC = 3,6$

- 1) Calculer BC
- 2) Calculer $\text{tg}(\hat{B})$. Donner la mesure de l'angle \hat{B} arrondie au degré près.
- 3) Placer le point M du segment [AB] tel que $AM = 1,6$ cm.
Placer le point N du segment [AC] tel que $AN = 1,2$ cm.
- 4) Démontrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Exercice 2

La figure suivante est un triangle rectangle en B



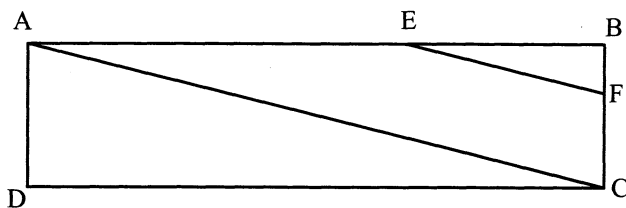
1. Calculer les distances AB, AH, CH et CB
2. Trouver l'aire du triangle ABC

Exercice 3

ABCD est un rectangle. tel que $AB = 8$ et $BC = 4BE = \frac{1}{4}AB$

(EF) et (AC) sont parallèles.

1. Calculez la mesure exacte de AC.
2. Calculez la mesure de \hat{BAC} arrondie au degré près
3. Calculez BF et EF



Exercice 4

On considère un triangle ABC tel que $AB = 5,6$; $BC = 4,2$; $AC = 7$

1. Faire une figure qu'on complétera au fur et à mesure des questions.
2. a) Quelle est la nature de ABC ? Justifier
b) Calculer la tangente de l'angle \widehat{BAC} . En déduire la valeur de l'angle \widehat{BAC}
3. Calculer l'aire du triangle ABC
4. Dans le triangle ABC, la hauteur issue de B coupe (AC) en H. Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de BH.
5. Montrer que $BH = 3,36$ cm.
6. Calculer HC.

Exercice 5

Dans un triangle ABC rectangle en A, on donne $\widehat{ABC} = 30^\circ$ et $AC = 5$ cm

3. Calculer AB
4. Soit M le milieu de [BC] ; la médiatrice de [BC] rencontre en N la droite (AC).
Calculer MN et NC
5. Montrer que les droites (BN) et (MA) sont parallèles.
6. Calculer le périmètre du trapèze AMBN.

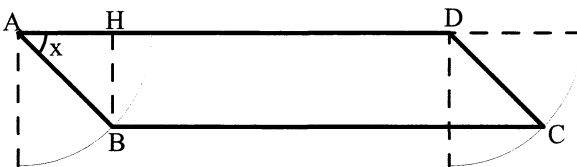
Exercice 6

Soit un triangle ABC rectangle en A de hauteur [AH] tel que $AB = 5$ et $AC = 4\sqrt{3}$

1. Déterminer les angles du triangle ABC
2. Le cercle (C) de centre H passant par A coupe (AB) en D et (AC) en E, montrer que les points D, H et E sont alignés puis calculer AH.
3. a. Calculer les angles du triangle ADE.
b. Déterminer le rayon du cercle (C)
c. Calculer les longueurs des côtés du triangle ADE.
4. Le cercle (C) coupe la droite (BC) en I et J. Calculer CH; CJ et CI

Exercice 7

Soit un parallélogramme ABCD tel que $BD = 3$. Le point B décrit le quart de cercle de rayon 2, de centre A du même côté que D par rapport à A. C décrit le quart de cercle



de centre D du côté opposé à A par rapport à D. On note par x la mesure en degré de l'angle \widehat{DAB} . Soit H le projeté orthogonal de B sur (AD).

1. Exprimer en fonction de x la longueur BH.
2. Déduire l'expression de l'aire S du parallélogramme ABCD en fonction de x
3. Comment choisir x pour que $S = 4$.

Exercice 8

L'unité de longueur est le centimètre. Soit ABC un triangle tel que $\hat{B} = 45^\circ$ et $\hat{C} = 60^\circ$, soit H et K les projetés orthogonaux respectivement de A sur (BC) et de C sur (AB) et de plus $BH = 6$.

1. Quelle est la mesure en degré de l'angle \hat{A} ?
2. Calculer AH et AB.
3. Calculez AC, BC, CK et AK.
4. Déduisez-en les valeurs exactes de $\cos(75^\circ)$, $\sin(75^\circ)$.

Exercice 9

Soit α un angle aigu a et b deux réels quelconques. Montrer que les expressions A , B et C sont indépendantes de α

- $A = (\cos \alpha + \sin \alpha)^2 + (\cos \alpha - \sin \alpha)^2$
- $B = \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + 2\cos^2 \alpha$
- $C = (a.\cos \alpha - b.\sin \alpha)^2 + (a.\sin \alpha + b.\cos \alpha)^2$

Exercice10

1. Calculer $\sin(36^\circ)$ sachant que $\cos(36^\circ) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$. En déduire $\text{tg}(36^\circ)$
2. Calculer $\cos(15^\circ)$ sachant que $\sin(15^\circ) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. En déduire $\text{tg}(15^\circ)$
3. Calculer $\sin(18^\circ)$ et $\text{tg}(18^\circ)$ sachant que $\cos(18^\circ) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

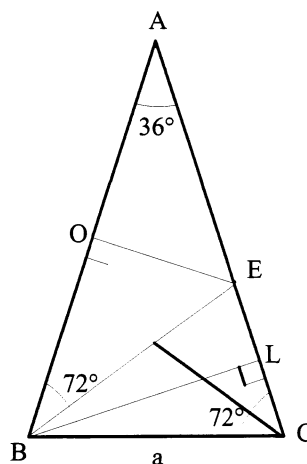
Exercice11

Montrer que pour tout angle x aigu on a :

- $(\cos x + \sin x)^2 - 2\sin x \cos x = 1$
- $(\sin x - \cos x)^2 + 2.\sin x.\cos x = 1$
- $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\cos^2 x.\sin^2 x$
- $\cos^4 x - \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x$
- $\text{tg}^2 x - \sin^2 x = \text{tg}^2 x.\sin^2 x$

Exercice 12

La figure ci-contre est un triangle isocèle, de sommet principal A, tel que $\widehat{ABC} = 72^\circ$, E le point de [AC] tel que [BE] est la bissectrice de l'angle \widehat{ABC} . On pose $BC = a$.



1. Calculer les mesures des angles \widehat{BCA} , \widehat{CAB} et \widehat{ABE}
2. Démontrer que $BE = AE = a$
3.
 - a) montrer que $AB = 2a \cdot \cos(36^\circ)$
 - b) montrer que $CE = 2a \cdot \cos(72^\circ)$
 - c) Dédire que $\cos(36^\circ) - \cos(72^\circ) = \frac{1}{2}$ (1)
4. On pose $EC = b$ et F le point de [BE] tel que [CF] est la bissectrice de l'angle \widehat{BCE} .
 - a) Montrer que $a = 2b \cdot \cos(36^\circ)$
 - b) Montrer que $BC = 4a \cdot \cos(36^\circ) \cdot \cos(72^\circ)$.
 - c) Dédire que $\cos(36^\circ) \cdot \cos(72^\circ) = \frac{1}{4}$ (2)
5. On pose $EC = b$ et F le point de [BE] tel que (CF) est la bissectrice de l'angle \widehat{BCE} .
 - a) Montrer que $a = 2b \cdot \cos(36^\circ)$
 - b) Montrer que $BC = 4a \cdot \cos(36^\circ) \cdot \cos(72^\circ)$
 - c) Dédire que $\cos(36^\circ) \cdot \cos(72^\circ) = \frac{1}{4}$ (2)
5. On pose $x = \cos(36^\circ)$ et $y = \cos(72^\circ)$
 En utilisant les relations (1) et (2) et l'égalité $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4 \cdot xy$.
 Calculer $x + y$. Dédisez-en $\cos(36^\circ)$ et $\cos(72^\circ)$.

IV. Corrigés des exercices (je maîtrise mes connaissances)

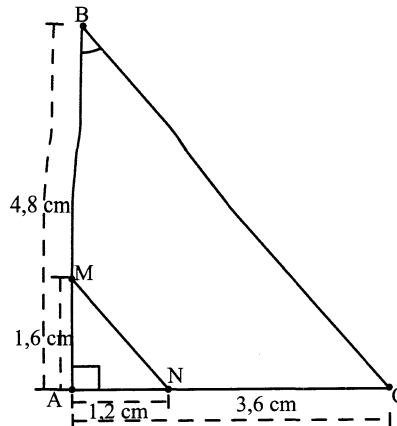
Exercice 1

1. Le triangle ABC est rectangle en A donc
- d'après Pythagore on a :
 $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 59,04$ donc $BC = 7,68$.
2. $\operatorname{tg}(\hat{B}) = \frac{AC}{AB} = \frac{3,6}{4,8} = 0,75$ donc $\hat{B} \approx 36,87$
3. Voir figure ci-contre.
4. On applique la réciproque du théorème de

Thalès on obtient : $\frac{AM}{AB} = \frac{1,6}{4,8} = \frac{1}{3}$ et

$$\frac{AN}{AC} = \frac{1,2}{3,6} = \frac{1}{3} \text{ donc } \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

d'où $(MN) \parallel (BC)$.



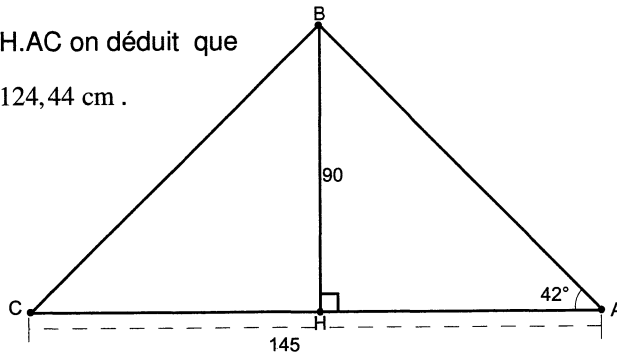
Exercice 2

1. Le triangle ABH est rectangle en H donc $\frac{AH}{AB} = \sin 42^\circ = 0,67$ donc

$$AB = \frac{AH}{\sin 42^\circ} = \frac{90}{0,67} = 134,33 \text{ cm .}$$

De la relation $AB^2 = AH.AC$ on déduit que

$$AH = \frac{AB^2}{AC} = \frac{18044,1}{145} = 124,44 \text{ cm .}$$

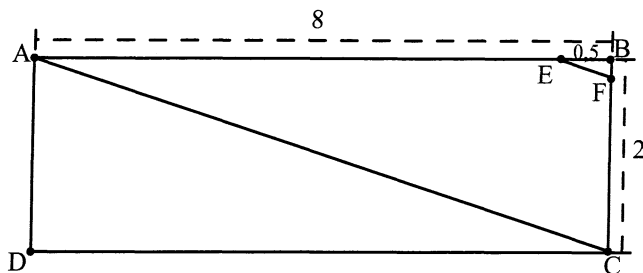


2. D'après le théorème de Pythagore on a :
 $BC^2 + AB^2 = AC^2$ donc $BC^2 = AC^2 - AB^2$ d'où $BC^2 = 2980,45$
d'où $BC = 54,6 \text{ cm}$. De la relation $BC^2 = CH.CA$ on aura :

$$CH = \frac{BC^2}{CA} = 0,376 \text{ cm}$$

3. L'aire du triangle ABC est $S = \frac{AC \times BH}{2} = \frac{145 \times 90}{2} = 6525 \text{ cm}^2$

Exercice 3



1. On constate que $BC = \frac{8}{4} = 2$ et $BE = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ donc D'après le théorème de Pythagore on a : $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc $AC^2 = 64 + 4 = 68$ donc $AC = 2\sqrt{17}$
2. Le triangle ABC est rectangle en B donc $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB}{AC} = \frac{8}{2\sqrt{17}} = 0,97$
Donc $\widehat{BAC} = 14^\circ$
3. On applique le Théorème de Thalès dans le triangle ABC on obtient

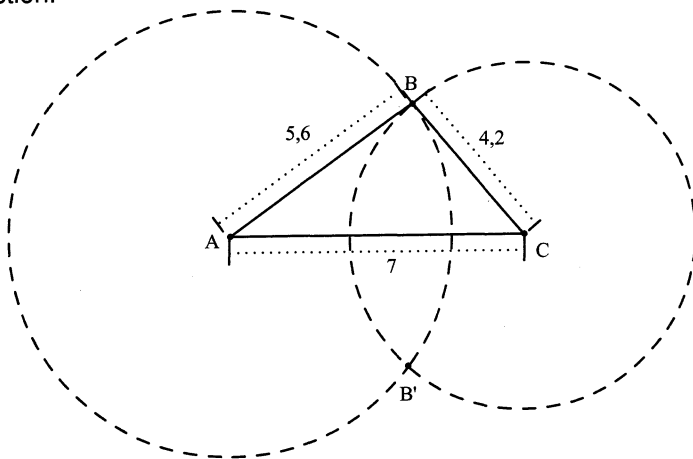
$$\frac{BE}{BA} = \frac{BF}{BC} \text{ donne } BF = \frac{BE \times BC}{BA} = \frac{\frac{1}{2} \times 2}{8} = \frac{1}{8} \text{ de même on a :}$$

$$\frac{BE}{BA} = \frac{BF}{BC} = \frac{EF}{AC} \text{ donc } \frac{EF}{AC} = \frac{1}{16} \text{ donne } EF = \frac{1}{16} \times 2\sqrt{17} \text{ donc } EF = \frac{\sqrt{17}}{8}$$

Exercice 4

On considère un triangle ABC tel que $AB = 5,6$; $BC = 4,2$; $AC = 7$

1. On construit le segment [AC] de longueur 7 , le cercle de centre A et de rayon 5,6 puis le cercle de centre C et de rayon 4,2 les deux cercles se coupent en deux point B et B' on trouve donc deux triangles qui répondent à la question.



2. En appliquant la réciproque du théorème de Pythagore on obtient :

$$BA^2 + BC^2 = 49 \text{ donc } BA^2 + BC^2 = AC^2$$

d'où le triangle ABC est rectangle en B.

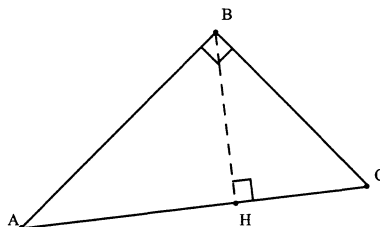
$$3. \operatorname{tg}(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AB} = \frac{4,2}{5,6} = 0,75 \text{ donc } \widehat{A} \approx 36,87^\circ$$

$$4. \text{ L'aire du triangle ABC, } S = \frac{AB \times BC}{2} = 11,76$$

$$5. \text{ L'aire du triangle ABC : } S = \frac{AC \times BH}{2} = \frac{7}{2} \times BH$$

$$6. \text{ On a : } S = 11,76 \text{ donc } \frac{7}{2} \times BH = 11,76 \text{ d'où } BH = 11,76 \times \frac{2}{7} = 3,36$$

$$7. \text{ On a : } BC^2 = BH^2 + HC^2 \text{ donc } HC^2 = BC^2 - BH^2 = 6,35 \text{ d'où } HC = 2,52.$$



Exercice 5

1. Le triangle ABC est rectangle en A donc

$$\operatorname{tg}(30^\circ) = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ donc } AB = \frac{3AC}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$$

2. Il faut calculer d'abord CM. D'après le théorème de Pythagore on a :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 = 100 \text{ donc } BC = 10 \text{ d'où } CM = 5. \text{ d'autre part on a : CMN triangle rectangle en M donc}$$

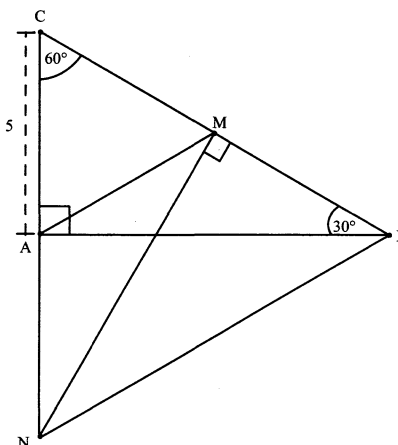
$$\operatorname{tg}(60^\circ) = \frac{MN}{MC} = \sqrt{3} \text{ d'où } MN = \sqrt{3}MC \text{ et par}$$

suite $MN = 5\sqrt{3}$ et on a :

$$\cos(60^\circ) = \frac{CM}{NC} = \frac{1}{2} \text{ donc } NC = 2CM = 10$$

3. Dans le triangle CNB on a : $M = C \cdot B$ et $A = C \cdot N$ donc $(AM) \parallel (BN)$.

4. Le triangle CNB est équilatéral donc le périmètre du trapèze AMBN est $P = 25$.



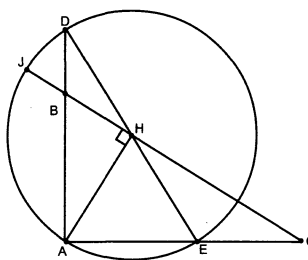
Exercice 6

1. Pour déterminer les angles du triangle ABC il est nécessaire de calculer ses rapports trigonométriques. On a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 64$ donc $BC = 8$ et par suite

$$\cos(\widehat{ACB}) = \frac{AC}{BC} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ d'où } \widehat{ACB} = 30^\circ \text{ et}$$

puisque ABC rectangle en A on aura : $\widehat{ABC} = 60^\circ$

2. Le triangle AED est rectangle en A donc il est inscrit dans le cercle de diamètre [DE] c'est le cercle (C) de centre H, donc $H = D \cdot E$ donne les points D, H et E sont alignés.



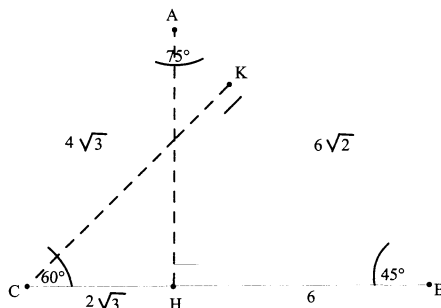
3. a. Le triangle ABH est rectangle en H de plus on a : $\widehat{ABH} = 60^\circ$ donc $\widehat{BAH} = 30^\circ$. Or le triangle AHD est isocèle de sommet principale H d'où $\widehat{ADH} = \widehat{DAH} = 30^\circ$ donc $\widehat{ADE} = 30^\circ$ et $\widehat{AED} = 60^\circ$.
- b. Il est nécessaire de calculer d'abord BH et CH. On a :
- $$BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{16}{8} = 2 \text{ donc } CH = 8 - 2 = 6. \text{ Et on a : } AH^2 = HB \cdot HC = 12$$
- donc le rayon du cercle (C) est $r = AH = 2\sqrt{3}$.
- c. [DE] est un diamètre de (C) d'où $DE = 2r = 4\sqrt{3}$.
- Dans le triangle ADE on a : $\sin 30^\circ = \frac{AE}{DE} = \frac{1}{2}$ donc $AE = \frac{1}{2} DE = 2\sqrt{3}$ et
- $$\cos 30^\circ = \frac{AD}{DE} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ donne } AD = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4\sqrt{3} = 6.$$
4. Le triangle ABC est rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur [BC]
 donc $AC^2 = CH \times CB$ d'où $CH = \frac{AC^2}{CB} = \frac{(4\sqrt{3})^2}{8} = 6$. Or $CI = CH - HI = 6 - 2\sqrt{3}$
 et $CJ = CH + HJ = 6 + 2\sqrt{3}$.

Exercice 7

1. Le triangle ABH est rectangle en H donc $\frac{BH}{AB} = \sin x$ c'est-à-dire $BH = AB \cdot \sin x = 2 \sin x$.
2. L'aire du parallélogramme ABCD est $S = AD \cdot BH$ donc $S = 4 \times 2 \sin x = 8 \sin x$.
3. $S = 4$ alors $8 \sin x = 4$ d'où $\sin x = \frac{1}{2}$ et par suite $x = 30^\circ$.

Exercice 8

1. Dans le triangle ABC on a : $\widehat{B} = 45^\circ$ et $\widehat{C} = 60^\circ$ donc $\widehat{A} = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$
2. Le triangle AHB est rectangle et isocèle en H d'où $AH = BH = 6$ cm. D'autre part dans le triangle AHB on a :
- $$\cos(45^\circ) = \frac{HB}{AB} \text{ d'où } AB = \frac{HB}{\cos(45^\circ)} \text{ donc } AB = 6\sqrt{2}.$$
- Le triangle AHC est rectangle en H donne $AC = \frac{AH}{\sin(60^\circ)}$



$$AC = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}. \text{ Et on a : } CH = AC \cdot \cos(60^\circ) = 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Le triangle CKB est rectangle et isocèle en K donc $CK = BK = CB \cdot \sin(45^\circ)$ et

$$\text{par suite on obtient : } CK = (6 + 2\sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = (3 + \sqrt{3})\sqrt{2}.$$

3. On a : $AK = AB - KB$ donc $AK = 6\sqrt{2} - (3 + \sqrt{3})\sqrt{2} = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$ et par suite

$$\cos(75^\circ) = \frac{AK}{AC} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin(75^\circ) = \frac{CK}{AC} = \frac{(3 + \sqrt{3})\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Exercice 9

α un angle aigu a et b deux réels quelconques . En appliquant les produits remarquables on obtient :

- $A = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2\cos \alpha \sin \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2\cos \alpha \sin \alpha$ donc $A = 1 + 1 = 2$
- $B = (\sin^2 \alpha)^2 - (\cos^2 \alpha)^2 + 2\cos^2 \alpha$
 $= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + 2\cos^2 \alpha$ donc
 $B = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + 2\cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $C = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha - 2ab \cos \alpha \sin \alpha + a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha + 2ab \cos \alpha \sin \alpha$ donc $C = a^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + b^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = a^2 + b^2$

Exercice 10

1. $\cos(36^\circ) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$. De la relation pour tout angle aigu x on a :

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ alors $\sin^2(36^\circ) = 1 - \cos^2(36^\circ)$ donc

$$\sin^2(36^\circ) = 1 - \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{16} = \frac{16 - 6 - 2\sqrt{5}}{16} \text{ d'où } \sin^2(36^\circ) = \frac{5 - \sqrt{5}}{8} \text{ et par suite}$$

$$\sin(36^\circ) = \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

$$\operatorname{tg}(36^\circ) = \frac{\sin(36^\circ)}{\cos(36^\circ)} = \frac{\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}}{\frac{\sqrt{5}+1}{4}} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$$

2. de la même façon On obtient : $\cos^2(15^\circ) = 1 - \sin^2(15^\circ) = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$ donc

$$\cos^2(15^\circ) = \frac{16-8+4\sqrt{3}}{16} = \frac{8+4\sqrt{3}}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \text{ donne } \cos(15^\circ) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \text{ et par}$$

$$\text{suite } \operatorname{tg}(15^\circ) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

3. Comme dans les questions précédentes. On obtient

$$\sin^2(18^\circ) = 1 - \cos^2(18^\circ) \text{ donc } \sin^2(18^\circ) = \frac{16-10-2\sqrt{5}}{16} = \frac{3-\sqrt{5}}{8} \text{ d'où}$$

$$\begin{aligned} \sin(18^\circ) &= \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}. \quad \operatorname{tg}(18^\circ) = \frac{\sin(18^\circ)}{\cos(18^\circ)} = \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \times \frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \\ &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{25-5}} \\ &= \sqrt{\frac{15+5-8\sqrt{5}}{20}} = \sqrt{\frac{20-8\sqrt{5}}{20}} = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} \end{aligned}$$

Exercice 11

On utilisant les produits remarquables on trouve.

- $(\cos x + \sin x)^2 - 2\sin x \cos x = \cos^2 x + \sin^2 x + 2\cos x \sin x - 2\cos x \sin x$
 $= \cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $(\sin x - \cos x)^2 + 2\sin x \cos x = \cos^2 x + \sin^2 x - 2\cos x \sin x + 2\cos x \sin x$
 $= \cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\cos^2 x \sin^2 x = 1 - 2\cos^2 x \sin^2 x$
- $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x)^2 - (\sin^2 x)^2 = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)$
 $= (\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$
- $\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} \text{ donc}$

$$\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \times (1 - \cos^2 x) = \operatorname{tg}^2 x \sin^2 x.$$

Exercice 12

1. Le triangle ABC est isocèle en A donc
 $\widehat{BCA} = \widehat{ABC} = 72^\circ$ donc $\widehat{CAB} = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$
 et puisque [BE) est la bissectrice de \widehat{ABC} alors
 $\widehat{ABE} = \frac{1}{2} \widehat{ABC} = 36^\circ$.

2. Le triangle ABE est isocèle en E car $\widehat{ABE} = \widehat{BAE}$
 donc $AE = BE$. $\widehat{EBC} = \frac{1}{2} \widehat{ABC} = 36^\circ$ d'où

$\widehat{BEC} = 72^\circ$ et par suite le triangle EBC est isocèle en B donc $BE = BC = a$.

- a. Si on désigne par $O = B * A$, Le triangle AOE est rectangle en O (ABE isocèle en E) donc

$$\frac{AO}{AE} = \cos(36^\circ)$$

d'où $AO = AE \cos(36^\circ) = a \cos(36^\circ)$ or $AB = 2AO$

donc $AB = 2a \cos(36^\circ)$.

- b. Si on désigne par $L = E * C$ alors le triangle BLC est rectangle en L (car

EBC est un triangle isocèle de sommet principal B) donc $\frac{LC}{BC} = \cos(72^\circ)$ d'où

$$LC = BC \cdot \cos(72^\circ) = a \cos(72^\circ). \text{ Or } EC = 2LC \text{ donc } EC = 2a \cos(72^\circ).$$

- c. Le triangle ABC est isocèle de sommet principal A donc

$$AC = AB = AE + EC \text{ donne } a + 2a \cos(72^\circ) = 2a \cos(36^\circ)$$

donc $2a(\cos(36^\circ) - \cos(72^\circ)) = a$ et par suite $\cos(36^\circ) - \cos(72^\circ) = \frac{1}{2}$ (1).

4. a. Le triangle BEC est isocèle en B donc $\widehat{BEC} = 72^\circ$ et [CF) la bissectrice de l'angle \widehat{BCE} donc $\widehat{FCE} = 36^\circ$ ce que donne que $\widehat{CFE} = 72^\circ$ donc le triangle CEF est isocèle en C. Par raisonnement analogue que les questions précédentes on déduit que $a = 2b \cos(36^\circ)$

- b. On a : $b = EC = 2a \cos(72^\circ)$ donc $BC = 4a \cos(72^\circ) \cdot \cos(36^\circ)$.

- c. De la relation précédente on déduit que : $a = 4a \cos(72^\circ) \cdot \cos(36^\circ)$

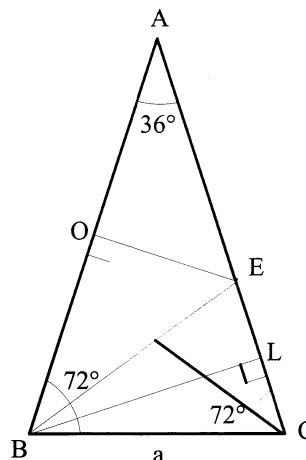
$$\text{donc } \cos(36^\circ) \cdot \cos(72^\circ) = \frac{1}{4} \text{ (2).}$$

5. On pose $x = \cos(36^\circ)$ et $y = \cos(72^\circ)$

- a. Des relations (1) et (2) on obtient : $x - y = \frac{1}{2}$ et $x \cdot y = \frac{1}{4}$ et de l'égalité

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4 \cdot xy. \text{ on trouve } (x + y)^2 - \frac{1}{4} = 1 \text{ donc } (x + y)^2 = \frac{5}{4} \text{ ce}$$

$$\text{qui donne que } x + y = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$



b. $\cos(36^\circ)$ et $\cos(72^\circ)$ sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x + y = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ x - y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

par addition on obtient

$$\begin{cases} 2x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ y = x - \frac{1}{2} \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \\ y = \frac{1+\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{2} \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \\ y = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \end{cases}$$

or $\cos(72^\circ) < \cos(36^\circ)$ donc $\cos(72^\circ) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\cos(36^\circ) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Activités Algébriques

I. Activités pour bien assimiler mon cours

Activité 1 (Développement d'une expression)

Développer une expression c'est l'écrire sans parenthèse.
Développer les expressions suivantes.

1. $A(x) = 2x(3x - 1)$
2. $B(x) = (2x + 1)x - (3x + 5)$
3. $C(x) = (3x + 5)^2$
4. $D(x) = (2x - 1)^2$
5. $E(x) = (x + 1)^3$
6. $F(x) = (x - 1)^3$
7. $G(x) = (3x - 1)(3x + 1)$

Distributivité de la multiplication sur l'addition.

Pour tous réels a, b, c et d on a :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Produits remarquables.

Pour tous réels a et b on a :

- $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
- $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Activité 2

1. Montrer que pour tous réels x et y :
$$x(1 + 2y)^2 + 2y(1 - x)^2 + (x + 2y)(1 - 2xy) = 2(x + 2y)$$
2. Développer et réduire l'expression :
$$A(x) = 7x^4 - x^2 - 6(x^2 + 3)^2 - 5(-x^2 - 7)^2$$

Pour démontrer une égalité du type $A = B$, on peut partir de A et le transformer pour obtenir B .

Activité 3 (Factorisation d'une expression)

Factoriser une expression c'est l'écrire sous la forme d'un produit de facteurs.

Factoriser les expressions suivantes :

1. $A(x) = 3x^2 + 5x$
2. $B(x) = 4x^2 + 20x + 25$
3. $C(x) = 9x^2 - 16$
4. $D(x) = (7x + 14)(x - 3) - (18x + 36)(3x - 1) - (x^2 + 2x)$
5. $E(x) = (4x^2 - 28x + 49) + (2x - 7) + (3x + 1)(7 - 2x)$

II. Corrigés des activités (bien assimiler mon cours)

Activité 1

1. $A(x) = 2x(3x - 1) = 6x^2 - 2x$
2. $B(x) = (2x + 1)x - (3x + 5) = 2x^2 + x - 3x - 5 = 2x^2 - 2x - 5$
3. $C(x) = (3x + 5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$
4. $D(x) = (2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$
5. $E(x) = (x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
6. $F(x) = (x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
7. $G(x) = (3x - 1)(3x + 1) = 9x^2 - 1$

Activité 2

1. Posons $B = x(1 + 2y)^2 + 2y(1 - x)^2 + (x + 2y)(1 - 2xy)$. Effectuons les produits : $B = x(1 + 4y + 4y^2) + 2y(1 - 2x + x^2) + x - 2x^2y + 2y - 4xy^2$
 $B = x + 4xy + 4xy^2 + 2y - 4xy + 2x^2y + x - 2x^2y + 2y - 4xy^2$
Réduisons : $B = 2x + 4y$ soit alors $B = 2(x + 2y)$
2. Dans le produit $6(x^2 + 3)^2$, l'élévation au carré a priorité sur la multiplication par 6.
On effectue $(x^2 + 3)^2$ puis on multiplie le résultat obtenu par 6. D'autre part $(-x^2 - 7)^2 = [-(x^2 + 7)]^2 = (x^2 + 7)^2$ puisque deux nombres opposés ont le même carré. On obtient donc :
 $A(x) = 7x^4 - x^2 - 6(x^4 + 6x^2 + 9) - 5(x^4 + 14x^2 + 49)$
 $A(x) = 7x^4 - x^2 - 6x^4 - 36x^2 - 54 - 5x^4 - 70x^2 - 245$
Soit finalement $A(x) = -4x^4 - 107x^2 - 299$

Activité 3

1. $A(x) = 3x^2 + 5x = x(3x + 5)$, (x est un facteur commun)
2. $B(x) = 4x^2 + 20x + 25 = (2x + 5)^2$
(produit remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$)
3. $C(x) = 9x^2 - 16 = (3x - 4)(3x + 4)$
(produit remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$)

4. $D(x) = (7x + 14)(x - 3) - (18x + 36)(3x - 1) - (x^2 + 2x)$
 $D(x) = 7(x + 2)(x - 3) - 18(x + 2)(3x - 1) - x(x + 2)$
 Donc $(x + 2)$ est un facteur commun d'où
 $D(x) = (x + 2)[7x - 21 - 54x + 18 - x]$ soit alors
 $D(x) = (x + 2)(-48x - 3) = -3(x + 2)(16x + 1)$
5. $E(x) = (4x^2 - 28x + 49) + (2x - 7) + (3x + 1)(7 - 2x)$.
 On remarque que $(4x^2 - 28x + 49) = (2x - 7)^2$ donc on peut écrire :
 $E(x) = (2x - 7)^2 + (2x - 7) - (3x + 1)(2x - 7)$, on aura donc $(2x - 7)$ comme
 facteur commun d'où $E(x) = (2x - 7)(2x - 7 + 1 - 3x - 1)$ ce qui donne
 $E(x) = (2x - 7)(-x - 7)$

III. Exercices (je maîtrise mes connaissances)

Exercice 1

Développer et éventuellement, réduire et ordonner chacune des expressions suivantes où x est un nombre quelconque (en utilisant les identités remarquables)

$$A = (9x + 8)^2$$

$$B = (6 - 5x)^2$$

$$C = (4x - 7)(4x + 7)$$

$$D = (x + 1)^2 + (2x - 5)(2x + 5)$$

$$E = (x + 2)(x - 2) - 3(2x - 4)^2 + 5(2x + 3)(1 - 7x)$$

Exercice 2

Développer et éventuellement, réduire et ordonner chacune des expressions suivantes où x est un nombre quelconque (en utilisant les identités remarquables)

$$A = (8x + 9)^2$$

$$B = (5 - 6x)^2$$

$$C = (7x - 4)(7x + 4)$$

$$D = (x + 1)^2 + (2x + 6)(2x - 6)$$

$$E = (x - 2)(x + 2) - 3(4x - 2)^2 + 5(3x + 2)(1 - 7x)$$

Exercice 3

On considère l'expression suivante où x est un nombre

quelconque : $K = (3x - 1)^2 - (3x - 1)(2x - 6)$

1. Développer, réduire puis ordonner K .
2. Factoriser K .
3. Développer, réduire puis ordonner l'expression de K obtenue au 2/

Exercice 4

1. Dans chacun des cas suivants, factoriser l'expression (le facteur commun est apparent):
 $A=3xy+x$ $B=3xt+3xy$ $C=3xt-3xy$ $D=(3x)^2+2x^2$
2. Factoriser $E=27+3x$.
3. Factoriser : $F=27xt+6xy$; $G=3x^2-27x$; $H=10x^3y^2+8x^2y^3$

Exercice 5

Les égalités suivantes sont-elles vraies pour n'importe quelle valeur de x ? Justifiez vos réponses (en calculant chaque membre avec une valeur de x si l'égalité vous semble fausse, ou en développant un des membres de façon à obtenir l'autre membre si l'égalité vous semble vraie):

- | | |
|------------------------|--------------------------|
| a. $(3x)^2=3x^2$ | b. $(3x)^2=6x^2$ |
| c. $(3x)^2=9x^2$ | d. $4x^2=(4x)^2$ |
| e. $8x^2-2x^2=(3x)^2$ | f. $(2x+3)^2=2x^2+9+12x$ |
| g. $(3x+3)^2=3(x+1)^2$ | h. $(3x-1)^2=9x^2-6x+1$ |

Exercice 6

Soit l'expression $A = (x+1)(2x-1) + (2x-1)(x+2)$

1. Développer A .
2. Factoriser A .
3. Calculer la valeur de A si $x = \frac{1}{2}$

Exercice 7

Soit l'expression $C=(2x+5)^2-(2x+5)(x+3)$

1. Factoriser C .
2. Développer C .
3. Calculer C pour $x=1$.

Dans les exercices de 8 jusqu'au 11, factoriser les expressions données.

Exercice 8

$$\begin{aligned}A &= (7x+3)(3x-2) + 3x-2 \\B &= (x+5)^2 - 25 \\C &= (6x-1)(7x-3) - (7x-3)(x+9) \\D &= 4(x-5) - (x-5)^2 \\E &= (x+8)(x+7) - (2x+5)(x+8)\end{aligned}$$

Exercice 9

$$\begin{aligned}A &= 9x^2 - 16 + (3x+4)(3x-2) \\B &= (4x-1)^2 - (x-5)^2\end{aligned}$$

$$C = (7x - 5)(3x + 2) - 6(3x + 2)(x + 3)$$

$$D = (2x + 3)(2x - 1) + 4x^2 + 12x + 9$$

$$E = (6x - 1)^2 - (7x + 2)^2$$

Exercice 10

$$A = 4x^2 - 9 + (2x + 3)(x - 5)$$

$$B = (x + 4)(-2x + 1) - 3(x + 4)^2$$

$$C = (x + 5)^2 - (x + 5)$$

$$D = (2x - 3)^2 - 64x^2$$

$$E = 100x^2 + 100x + 25 - (10x + 5)(x + 7)$$

Exercice 11

$$A = (-2x + 3)^2 - (x - 9)^2$$

$$B = (x + 3)^2 - 25(3x + 4)^2$$

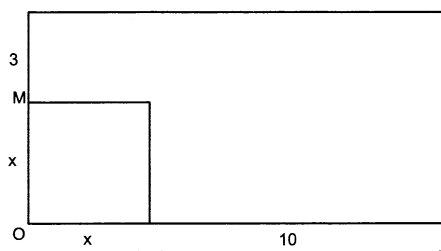
$$C = x^2 - 9 - (2x + 5)(x - 3) + 5x - 15$$

$$D = x^2 - 16 + (x + 4)^2$$

$$E = (2x + 7)^2 + 10x + 35$$

Exercice 12

Dans la figure ci-dessous, qui représente un terrain rectangulaire, on désigne par x la distance OM.



1. Exprimer l'aire \mathcal{A} du terrain en fonction de x .
2. Développer \mathcal{A} .
3. La partie grisée représente une maison, l'autre partie un jardin. Quelle est la forme de la maison ?
4. Calculer l'aire du jardin en fonction de x .
5. Si un côté de la maison mesure 9 m, quelle est l'aire du terrain ? Quelle est l'aire B du jardin ?

Exercice 13

1. Aïmen dit à Ines : "choisis un nombre x ; ajoute 1 au triple de x ; calcule alors le carré du nombre obtenu et retranche lui le nombre 4". Quel résultat trouvera Ines si elle choisit : $x = 5$?
2. Aïmen propose à Ines quatre expressions dont l'une correspond au calcul qu'il lui a fait faire.

Voici ces quatre expressions :

$$A = 3(x+1)^2 - 4 ; B = 4 - (3x+1)^2 ; C = (3x+1)^2 - 4 \text{ et } D = (x+3)^2 - 4$$

Quelle expression Ines doit-elle choisir ?

3. a. Factoriser : $C = (3x+1)^2 - 4$
- b. Résoudre : $(3x-1)(3x+3) = 0$
- c. Ines rejoue ; elle choisit un nombre négatif et elle trouve alors zéro.
Quel nombre a-t-elle choisi ? Vérifier alors le calcul de Ines.

Exercice 14

On donne l'expression algébrique : $D = (3x+1)(6x-9) - (2x-3)^2$

1. Montrer que D peut s'écrire sous la forme développée et réduite:
 $D = 14x^2 - 9x - 18$.
2. Calculer les valeurs de D pour $x = \frac{3}{2}$ puis $x = \sqrt{2}$.
(écrire le deuxième résultat sous la forme $a + b\sqrt{2}$, avec a et b entiers)
3. Factoriser $6x - 9$, puis factoriser D.
4. En déduire les solutions de l'équation $D = 0$.

III. Corrigés des exercices (je maîtrise mes connaissances)

Exercice 1

$$A = (9x+8)^2 = (9x)^2 + 2 \times 9x \times 8 + 8^2 = 81x^2 + 144x + 64$$

$$B = (6-5x)^2 = 6^2 - 2 \times 6 \times 5x + (5x)^2 = 36 - 60x + 25x^2$$

$$C = (4x-7)(4x+7) = (4x)^2 - 7^2 = 16x^2 - 49$$

$$D = (x+1)^2 + (2x-5)(2x+5) = x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 + (2x)^2 - 5^2$$

$$D = x^2 + 2x + 1 + 4x^2 - 25 = 5x^2 + 2x - 24$$

$$E = (x+2)(x-2) - 3(2x-4)^2 + 5(2x+3)(1-7x)$$

$$E = x^2 - 4 - 3(4x^2 - 16x + 16) + 5(2x - 14x^2 + 3 - 21x)$$

$$E = x^2 - 4 - 12x^2 + 48x - 48 + 10x - 70x^2 + 15 - 105x$$

$$E = -81x^2 - 47x - 37$$

Exercice 2

$$A = (8x+9)^2 = (8x)^2 + 2 \times 8x \times 9 + 9^2 = 64x^2 + 144x + 81$$

$$B = (5-6x)^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times 6x + (6x)^2 = 25 - 60x + 36x^2$$

$$C = (7x-4)(7x+4) = (7x)^2 - 4^2 = 49x^2 - 16$$

$$D = (x+1)^2 + (2x+6)(2x-6) = x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 + (2x)^2 - 6^2$$

$$D = x^2 + 2x + 1 + 4x^2 - 36 = 5x^2 + 2x - 35$$

$$E = (x-2)(x+2) - 3(4x-2)^2 + 5(3x+2)(1-7x)$$

$$E = x^2 - 4 - 3(16x^2 - 16x + 4) + 5(3x - 21x^2 + 2 - 14x)$$

$$E = x^2 - 4 - 48x^2 + 48x - 12 + 15x - 105x^2 + 10 - 70x$$

$$E = -152x^2 - 7x - 6$$

Exercice 3

$$K = (3x-1)^2 - (3x-1)(2x-6)$$

1. $K = (3x-1)^2 - (3x-1)(2x-6)$

$$K = 9x^2 - 6x + 1 - (6x^2 - 18x - 2x + 6)$$

$$K = 9x^2 - 6x + 1 - 6x^2 + 18x + 2x - 6$$

$$K = 3x^2 + 14x - 5$$

2. $K = (3x-1)(3x-1) - (3x-1)(2x-6)$

$$K = (3x-1)[(3x-1) - (2x-6)]$$

$$K = (3x-1)[3x-1-2x+6]$$

$$K = (3x-1)(x+5)$$

3. $(3x-1)(x+5) = 3x^2 + 15x - x - 5 = 3x^2 + 14x - 5$

On retrouve le résultat du 1/.

Exercice 4

1. $A = 3xy + x$ donne $A = x(3y + 1)$

$$B = 3xt + 3xy \text{ donne } B = 3x(t + y)$$

$$C = 3xt - 3xy \text{ donne } C = 3x(t - y)$$

$$D = (3x)^2 + 2x^2 \text{ donne } D = x^2(9 + 2) = 11x^2$$

2. $27 = 3 \times 9$ donc $E = 3(9 + x)$

3. $F = 27xt + 6xy = 3x \times 9 + 3x \times 2y = 3x(9 + 2y)$

$$G = 3x^2 - 27x = 3x(x - 9)$$

$$H = 10x^3y^2 + 8x^2y^3 = x^2y^2 \times 10x + x^2y^2 \times 8y = x^2y^2(10x + 8y)$$

Exercice 5

- a. $(3x)^2 = 3x^2$ cette égalité est fausse car $(3x)^2 = 9x^2$
- b. $(3x)^2 = 6x^2$ cette égalité est fausse
- c. $(3x)^2 = 9x^2$ cette égalité est correcte
- d. $4x^2 = (4x)^2$ cette égalité est fausse car $(4x)^2 = 16x^2$
- e. $8x^2 - 2x^2 = (3x)^2$ cette égalité est fausse $8x^2 - 2x^2 = 6x^2 \neq 9x^2$
- f. $(2x + 3)^2 = 2x^2 + 9 + 12x$ cette égalité est fausse car $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$
- g. $(3x + 3)^2 = 3(x + 1)^2$ cette égalité est fausse
car $(3x + 3)^2 = [3(x+1)]^2 = 9(x+1)^2$
- h. $(3x - 1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$ cette égalité est correcte.

Exercice 6

Soit l'expression $A = (x+1)(2x-1) + (2x-1)(x+2)$

- 1. $A = 2x^2 - x + 2x - 1 + 2x^2 + 4x - x - 2 = 4x^2 + 4x - 3 = (2x)^2 + 2 \times 2x + 1 - 4$
- 2. $A = (2x + 1)^2 - 2^2 = (2x + 1 + 2)(2x + 1 - 2) = (2x + 3)(2x - 1)$
- 3. Pour $x = \frac{1}{2}$, $A = 0$.

Exercice 7

- 1. $C = (2x+5)^2 - (2x+5)(x+3)$ $(2x + 5)$ est un facteur commun donc
 $C = (2x + 5)[(2x + 5) - (x + 3)] = (2x + 5)(2x + 5 - x - 3) = (2x+5)(x+2)$.
- 2. $C = 2x^2 + 5x + 4x + 10 = 2x^2 + 9x + 10$.
- 3. pour $x = 1$, $C = 21$.

Exercice 8

$$A = (7x + 3)(3x - 2) + 3x - 2 = (7x + 3)(\underline{3x - 2}) + 1 \times (\underline{3x - 2}) \\ = (3x - 2)[7x + 3 + 1] = (3x - 2)(7x + 4)$$

$$B = (x + 5)^2 - 25 = (x + 5)^2 - 5^2 = [x+5-5][x+5+5] = x(x + 10)$$

$$C = (6x - 1)(7x - 3) - (7x - 3)(x + 9) = (6x-1)(\underline{7x-3}) - (\underline{7x-3})(x+9) \\ = (7x - 3)[6x-1 - (x+9)] = (7x - 3)[6x-1-x-9] = (7x - 3)(5x - 10)$$

$$D = 4(x - 5) - (x - 5)^2 = 4(\underline{x - 5}) - (x - 5)(\underline{x - 5}) = (x - 5) [4 - (x-5)] \\ = (x - 5) [4 - x + 5] = (x - 5)(-x + 9)$$

$$E = (x + 8)(x + 7) - (2x + 5)(x + 8) = (\underline{x + 8})(x + 7) - (2x + 5)(\underline{x + 8}) \\ = (x+8)[x+7 - (2x+5)] = (x + 8)[x + 7 - 2x - 5] = (x + 8)(-x + 2)$$

Exercise 9

$$A = 9x^2 - 16 + (3x + 4)(3x - 2) = (3x)^2 - 4^2 + (3x + 4)(3x - 2) \\ = (3x-4)(3x+4) + (3x+4)(3x-2) = (3x + 4)[3x-4 + 3x-2] = (3x+4)(6x-6)$$

$$B = (4x - 1)^2 - (x - 5)^2 = [(4x-1) - (x-5)][(4x-1) + (x-5)] \\ = (4x - 1 - x + 5)(4x - 1 + x - 5) = (3x + 4)(5x - 6)$$

$$C = (7x - 5)(3x + 2) - 6(3x + 2)(x + 3) = (7x-5)(3x+2) - 6(3x+2)(x+3) \\ = (3x+2)[7x-5 - 6(x+3)] = (3x+2)(7x-5 - 6x-18) = (3x + 2)(x - 23)$$

$$D = (2x + 3)(2x - 1) + 4x^2 + 12x + 9 = (2x+3)(2x-1) + (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 \\ = (2x + 3)(2x - 1) + (2x + 3)^2 = (2x+3)(2x-1) + (2x+3)(2x+3) \\ = (2x + 3)[2x - 1 + 2x + 3] = (2x + 3)(4x + 2)$$

$$E = (6x - 1)^2 - (7x + 2)^2 = [6x-1 - (7x+2)][6x-1 + 7x+2] \\ = (6x-1-7x-2)(6x-1+7x+2) = (-x-3)(13x+1)$$

Exercise 10

$$A = 4x^2 - 9 + (2x + 3)(x - 5) = (2x)^2 - 3^2 + (2x + 3)(x - 5) \\ = (2x+3)(2x-3) + (2x+3)(x-5) = (2x+3)[2x-3+x-5] = (2x + 3)(3x - 8)$$

$$B = (x + 4)(-2x + 1) - 3(x + 4)^2 = (x+4)(-2x+1) - 3(x+4)(x+4) \\ = (x + 4)[-2x + 1 - 3(x+4)] = (x + 4)(-2x+1-3x-12) = (x+4)(-5x-11)$$

$$C = (x + 5)^2 - (x + 5) = (x+5)(x+5) - 1 \times (x+5) \\ = (x + 5)[x + 5 - 1] = (x + 5)(x + 4)$$

$$D = (2x - 3)^2 - 64x^2 = (2x - 3)^2 - (8x)^2 = [2x-3 - 8x][2x-3 + 8x] \\ = (-6x - 3)(10x - 3)$$

$$E = 100x^2 + 100x + 25 - (10x+5)(x+7) = (10x)^2 + 2 \times 10x \times 5 + 5^2 - (10x+5)(x+7) \\ = (10x+5)^2 - (10x+5)(x+7) = (10x+5)(10x+5) - (10x+5)(x+7) \\ = (10x + 5)[10x+5 - (x+7)] = (10x+5)(10x+5 - x-7) = (10x+5)(9x-2)$$

Exercise 11

$$A = (-2x + 3)^2 - (x - 9)^2 = [-2x+3 - (x-9)][-2x+3 + x-9] \\ = (-2x + 3 - x + 9)(-2x + 3 + x - 9) = (-3x + 12)(-x - 6)$$

$$B = (x + 3)^2 - 25(3x + 4)^2 = (x+3)^2 - 5^2 \times (3x+4)^2 = (x+3)^2 - [5 \times (3x + 4)]^2 \\ = (x+3)^2 - [15x + 20]^2 = [x+3 - (15x+20)][x+3 + 15x+20] \\ = (x + 3 - 15x - 20)(x + 3 + 15x + 20) = (-14x - 17)(16x + 23)$$

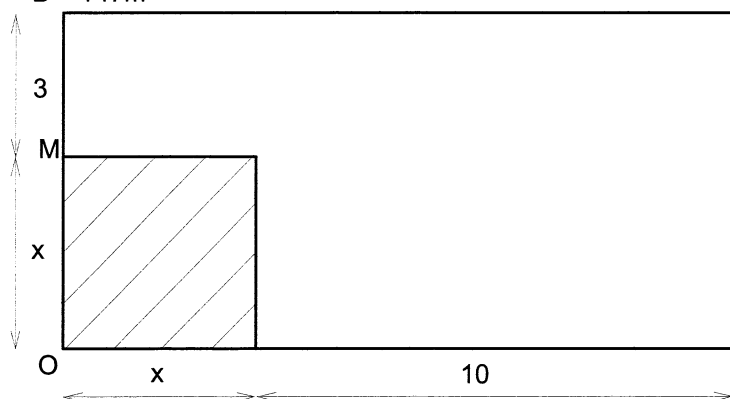
$$\begin{aligned}
 C &= x^2 - 9 - (2x + 5)(x - 3) + 5x - 15 = x^2 - 3^2 - (2x+5)(x-3) + 5 \times (x-3) \\
 &= (x-3)(x+3) - (2x+5)(x-3) + 5 \times (x-3) = (x-3)[x+3 - (2x+5) + 5] \\
 &= (x-3)(x+3 - 2x-5 + 5) = (x-3)(-x+3) = (x-3)(-1)(x-3) = -(x-3)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D &= x^2 - 16 + (x+4)^2 = x^2 - 4^2 + (x+4)(x+4) = (x-4)(x+4) + (x+4)(x+4) \\
 &= (x+4)[x-4 + x+4] = (x+4)(2x) = 2x(x+4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E &= (2x+7)^2 + 10x + 35 = (2x+7)(2x+7) + 5 \times (2x+7) \\
 &= (2x+7)[2x+7+5] = (2x+7)(2x+12)
 \end{aligned}$$

Exercice 12

1. L'aire \mathcal{A} du terrain rectangulaire est : $\mathcal{A} = (x+3)(x+10)$
2. $\mathcal{A} = x^2 + 13x + 30$
3. La partie grisée a la forme d'un carré d'aire x^2
4. L'aire occupée par la maison est l'aire du carré de côté x , soit x^2 . Donc l'aire du jardin est la différence entre l'aire du terrain et l'aire de la maison soit alors $13x + 30$
5. si $x = 9$ m alors l'aire du terrain $A = 228 \text{ m}^2$ et l'aire du jardin $B = 147 \text{ m}^2$



Exercice 13

1. On doit calculer $(3 \times 5 + 1)^2 - 4$ soit $(15 + 1)^2 - 4 = 252$.
2. L'expression C.
3. a) $C = (3x + 1)^2 - 4 = (3x + 1)^2 - 2^2 = (3x + 1 - 2)(3x + 1 + 2)$
donc $C = (3x - 1)(3x + 3)$.
b) $(3x - 1)(3x + 3) = 0$ équivaut à $3x + 1 = 0$ ou $3x + 3 = 0$
Equivaut à $x = -1$ ou $x = -1$ donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{ -1, -1 \right\}$.
c) Ines avait choisi -1 d'après la question précédente.

Exercice 14

1. $D = (3x + 1)(6x - 9) - (2x - 3) = 18x^2 - 27x + 6x - 9 - 4x^2 + 12x - 9$
donc $D = 14x^2 - 9x - 18$
2. pour $x = \sqrt{2}$; $D = 14\sqrt{2}^2 - 9\sqrt{2} - 18 = 28 - 9\sqrt{2} - 18$ donc $D = 10 - 9\sqrt{2}$.
3. $6x - 9 = 3(2x - 3)$; $D = 3(3x + 1)(2x - 3) - (2x - 3)^2$ donne
/ $D = (2x - 3)(3(3x + 1) - (2x - 3))$ d'où $D = (2x - 3)(9x + 3 - 2x + 3)$ ce qui donne
 $D = (2x - 3)(7x + 6)$.
4. $D = 0$ équivaut à $x = \frac{3}{2}$ ou $x = -\frac{6}{7}$.

Devoir de synthèse N° 1 – 1

Exercice N°1

1. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{(-5x^2y^3)^3 \times (-xy^2)^3}{(-5x^2y^3)^4 \times (x^{-3}y)^{-2}} ; \quad B = 5\sqrt{20} + 2\sqrt{80} - 12\sqrt{45} - \sqrt{125}$$

$C = xy\sqrt{49y} + 4y\sqrt{xy^2} - \sqrt{25x^2y^3}$ où x et y réels positifs.

2. a. Calculer $(2 + \sqrt{5})^2$ et $(2 - \sqrt{7})^2$

b. Simplifier : $\frac{9 + 4\sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} ; \quad \frac{\sqrt{5}}{3 - 2\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{3 + 2\sqrt{5}}$

Exercice N°2

1. Développer les expressions suivantes :

$$A = (3x - 2)^2 ; \quad B = (3x - 2)^2 - (\sqrt{3} + x)(\sqrt{3} - x)$$

2. Factoriser les expressions suivantes.

$$C = 49x^2 - 25 ; \quad D = (2x + 3)(x + \sqrt{2}) + (x^2 + 2\sqrt{2}x + 2) ; \quad E = x^2 - 4x - 5$$

Exercice N°3

Soit (C) un cercle de centre O et de diamètre [AB] tel que $AB = 6$ cm . C est un point de (C) tel que $\widehat{BAC} = 50^\circ$.

1. Faire une figure.
2. La parallèle à (OC) menée de B recoupe (C) en E. Montrer que [BC] est bissectrice de l'angle \widehat{ABE} .
3. Montrer que le triangle ACE est isocèle.
4. Soit F le point tel que $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AF}$.
 - a) Quelle est la nature du quadrilatère CBFA ?
 - b) Montrer que F est un point de (C).
5. Le cercle (C') de diamètre [AO] recoupe (AE) en I et (AF) en J.
 - a) Montrer que le point I est le milieu du segment [AE] et J milieu de [AF].
 - b) En déduire que les droites (IJ) et (EF) sont parallèles.
6. Calculer \widehat{ABE} . Déduire les mesures de \widehat{AFE} et \widehat{AJI}

Devoir de synthèse N° 1 – 2

Exercice N° 1

1. Simplifier les expressions suivantes : $A = 3\sqrt{18} - 4\sqrt{8} + \sqrt{50}$.

$B = \frac{\sqrt{9a^5b^2} + 4\sqrt{ab^6}}{b\sqrt{a}}$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$.

2. On considère les réels x et y tels que : $x = \sqrt{17+12\sqrt{2}}$ et $y = \sqrt{17-12\sqrt{2}}$.

- a) Montrer que x et y sont inverses.
b) En déduire une écriture simple de chacun des réels suivants :

$$C = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - x - y \text{ et } D = \frac{x^3 + y^3}{xy^2 + x^2y}$$

- c) Calculer $(3+2\sqrt{2})^2$ puis résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $x^2 - 17 = 12\sqrt{2}$

Exercice N° 2

1. Ecrire D sous la forme $a\sqrt{b}$, où a est un entier relatif et b un entier naturel le plus petit possible. $D = \sqrt{200} - 2\sqrt{50} + 3\sqrt{32}$
2. Calculer $E = (3 - 2\sqrt{5})^2$
3. Factoriser $F = 9x^2 - 49$
4. Soit $G = (x+1)^2 - 2(x+1)(3x-4)$
b) Développer et réduire G
c) Factoriser G

Exercice N° 3

Soit un parallélogramme $OABC$ et A' un point de $[OA]$. La parallèle à (BA) passant par A' coupe (OB) en B' et la parallèle à (BC) passant par B' coupe (OC) en C' .

1. Comparer les rapports $\frac{OA'}{OA}$ et $\frac{OB'}{OB}$ puis $\frac{OB'}{OB}$ et $\frac{OC'}{OC}$.
2. En déduire que $\frac{OA'}{OA} = \frac{OC'}{OC}$.
3. Montrer que les droites (AC) et $(A'C')$ sont parallèles.

3. $\widehat{CEA} = \widehat{CBA}$ (deux angles inscrits qui interceptent le même arc \widehat{AC})
 $\widehat{CAE} = \widehat{CBE}$ (deux angles inscrits qui interceptent le même arc \widehat{CE}) or
 $\widehat{CBE} = \widehat{CBA}$ donc $\widehat{CEA} = \widehat{CAE}$ d'où le triangle ACE est isocèle en C.
4. a) On a par hypothèse $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AF}$ donc CBFA est parallélogramme et puisque $(AC) \perp (BC)$ (ABC triangle inscrit dans le cercle de diamètre [AB]) donc CBFA est un rectangle.
 b) D'après a. le triangle BAF est rectangle en F , le cercle (C) est de diamètre l'hypoténuse [AB] donc F est un point de (C).
5. a) Le triangle OAE est isocèle en O ($OA = OE$) et I un point de (C') dont [OA] est un diamètre donc les droites (OI) et (AE) sont perpendiculaires donc [OI] est la médiane du triangle OAE issue de O donc $I = A * E$, de la même façon on a : OAF un triangle isocèle en O et (OJ) \perp (AF) donc $J = A * F$
 b) Dans le triangle AEF on a : $I = A * E$ et $J = A * F$ donc (IJ) // (EF)
6. D'après la question 2. (BC) est la bissectrice de l'angle \widehat{ABE} donc $\widehat{ABE} = 2\widehat{ABC} = 2(90^\circ - 50^\circ) = 80^\circ$. $\widehat{AFE} = \widehat{ABE} = 80^\circ$ (deux angles inscrits qui interceptent le même arc \widehat{AE}) . $\widehat{AJI} = \widehat{AFE} = 80^\circ$ (deux angles correspondants déterminés par deux parallèles (IJ) et (EF) et la sécante (FA).

Corrigé du devoir de synthèse N° 1 – 2

Exercice N° 1

1. $A = 3\sqrt{9 \times 2} - 4\sqrt{4 \times 2} + \sqrt{25 \times 2} = 6\sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$,

$$B = \frac{\sqrt{9a^4 \cdot b^2 \cdot a} + 4\sqrt{(b^3)^2 \cdot a}}{b\sqrt{a}} = \frac{3a^2|b|\sqrt{a} + 4|b|^3\sqrt{a}}{b\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}(-3a^2b - 4b^3)}{b\sqrt{a}}$$

donc $B = -3a^2 - 4b^2$.

2. a) $x \times y = \sqrt{(17+12\sqrt{2})(17-12\sqrt{2})} = \sqrt{17^2 - 2 \times 12^2} = \sqrt{1} = 1$

donc x et y sont inverses.

b) $C = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - x - y = \frac{y+x}{xy} - x - y = y + x - x - y = 0$

$$D = \frac{x^3 + y^3}{xy^2 + yx^2} = \frac{(x+y)(x^2 + y^2 - xy)}{y+x} = x^2 + y^2 - 1 \text{ Donc}$$

$$D = 17 + 12\sqrt{2} + 17 - 12\sqrt{2} - 1 = 33.$$

c) $(3+2\sqrt{2})^2 = 17+12\sqrt{2}$. L'équation : $x^2 = 17+12\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 = (3+2\sqrt{2})^2$ donc

on trouve deux solutions $x = -3-2\sqrt{2}$ où $x = 3+2\sqrt{2}$ donc

$$S_{\mathbb{R}} = \{-3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}\}.$$

Exercice N°2

1. $D = \sqrt{10^2 \times 2} - 2\sqrt{5^2 \times 2} + 3\sqrt{4^2 \times 2} = 10\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$.

2. $E = (3-2\sqrt{5})^2 = 9 - 12\sqrt{5} + 20 = 29 - 12\sqrt{5}$.

3. $F = (3x)^2 - 7^2$ donc $F = (3x-7)(3x+7)$.

4. a) $G = (x+1)^2 - 2(x+1)(3x-4) = x^2 + 2x + 1 - 6x^2 + 2x + 8$

donc $G = -5x^2 + 4x + 9$

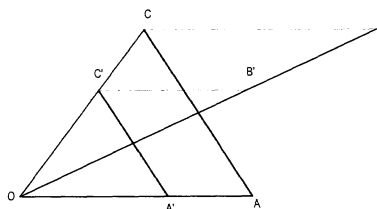
b) $G = (x+1)[(x+1) - 2(3x-4)] = (x+1)(-5x+9)$.

Exercice N° 3

1. En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle OAB, $(A'B') \parallel (AB)$ donc

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} \quad (1).$$

Dans le triangle OBC, $(B'C') \parallel (BC)$ donc $\frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} \quad (2).$



2. D'après (1) et (2) on déduit que $\frac{OA'}{OA} = \frac{OC'}{OC}$ et on a

$C' \in [OC]$ et $A' \in [OA]$ donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès on aura $(A'C') \parallel (AC).$

Equations et Inéquations du premier degré à une inconnue

I. Activités pour bien assimiler mon cours

Activité 1 (Détermination d'une équation du premier degré)

Un téléphone portable et son étui coûtent ensemble 120 dinars. Le téléphone coûte 100 dinars de plus que l'étui. Quels sont les prix du téléphone et de l'étui ?

L'équation $a + x = b$ où x est l'inconnue a une seule solution : $x = b - a$.

L'équation $ax = b$ où x est l'inconnue ($a \neq 0$) a une seule solution: $x = \frac{b}{a}$

Résoudre une équation, c'est trouver toutes ses solutions.

Activité 2 (Résolution d'une équation)

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $2(2x - 5) - (4x + 7) = 3(2x - 1) - (3x + 1)$

2. $4(2x - 5) - 3(3x + 1) = -6(x - 2) + 5x$

3. $2(x - 3) - 5x = -3x - 6$

Activité 3 (Résolution d'une équation)

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $(3x + 1)(x - 4) = 0$

2. $x(2x - 1)(-x + 3) = 0$

3. $x^2 - 2x = -1$

Résolution d'équations du type : $(ax + b)(cx + d) = 0$

Un produit est nul si et seulement si l'un des deux facteurs est nul.

$A \times B = 0$ équivaut à $A = 0$ ou $B = 0$.

(RESOLUTION D'UNE INEQUATION)

Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue qui rendent vraie l'inégalité.

Signe de $ax + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	signe de $(-a)$	0	signe de (a)

Activité 4 :

(Résolution d'inéquations : exemples et présentation des solutions)

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes

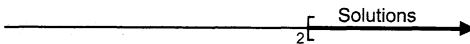
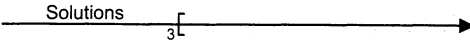
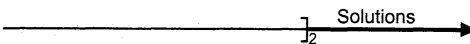
- $5x - 10 \geq 0$
- $8x - 24 < 0$
- $12 - 6x < 0$

Activité 5

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes et représenter leur ensemble de solutions sur une droite graduée :

1. $8x - 3 < 9 - 4x$
2. $2x > 3(1 + x)$
3. $3x - 8 \leq 8(x - 2)$
4. $\frac{3 + 2x}{6} - \frac{3 + x}{8} < 0$

Activité 4

Inéquation	Résolution	Solutions
$5x - 10 \geq 0$	$5x \geq 10$, donc $x \geq 2$ $S_{\mathbb{R}} = [2, +\infty[$	
$8x - 24 < 0$	$8x < 24$, donc $x < 3$ $S_{\mathbb{R}} =]-\infty, 3[$	
$12 - 6x < 0$	$-6x < -12$, donc $x > 2$ $S_{\mathbb{R}} =]2, +\infty[$	

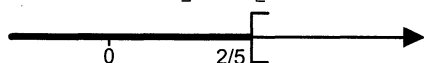
Activité 5

1. $8x - 3 < 9 - 4x$ équivaut à $8x + 4x < 9 + 3$ équivaut à $12x < 12$
d'où $x < 1$ donc $S_{\mathbb{R}} =]-\infty, 1[$

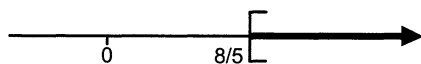


2. $5 - 2x > 3(1 + x)$ équivaut à $5 - 2x > 3 + 3x$,
équivaut à $-2x - 3x > 3 - 5$ équivaut à $-5x > -2$ équivaut à $x < \frac{2}{5}$

d'où $S_{\mathbb{R}} =]-\infty, \frac{2}{5}[$



3. $x - 8 \leq 8(x - 2)$
 $3x - 8 \leq 8x - 16$ équivaut à $3x - 8x \leq 8 - 16$
équivaut à $-5x \leq -8$ équivaut à $x \geq \frac{8}{5}$ d'où $S_{\mathbb{R}} = [\frac{8}{5}, +\infty[$

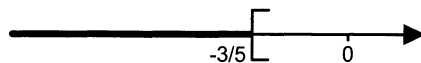


4) $\frac{3 + 2x}{6} - \frac{3 + x}{8} < 0$

équivaut à $\frac{4(3 + 2x)}{24} - \frac{3(3 + x)}{24} < 0$ équivaut à $4(3 + 2x) - 3(3 + x) < 0$

équivaut à $12 + 8x - 9 - 3x < 0$ équivaut à $5x < -3$ donc $x < -\frac{3}{5}$

d'où $S_{\mathbb{R}} =]-\infty, -\frac{3}{5}[$



III. Exercices (je maîtrise mes connaissances)

Exercice 1

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $\frac{x+2}{3} = \frac{x-1}{7}$

2. $\frac{x+2}{3} + \frac{x-1}{7} = 5$

3. $x + \frac{x+1}{2} - \frac{x+2}{3} = \frac{1}{6}(3x+1)$

4. $x\sqrt{2} + x - 2 = 0$

5. a) $|2x-4| = 6$

b) $|2x-6| + |x-9| = 0$ c) $|4x-6| + |6x-9| = 10$

6. $x^2 - 4 = (x-1)(x-3)$

Exercice 2

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $(2x+1)(3x-4) - (2x+1)(x-1) + 6(2x+1) = 0$

2. $\frac{(x-2)^2 - 9(2x-1)^2}{3} = 0$

3. $(x-1)^2 - (2x+3)^2 = x+4$ 4. $(x-1)^3 - (x+1)^3 = -2$

5. $\sqrt{4x^2 - 28x + 49} = 9$ 6. $4x^2 - 4x = -1$

Exercice 3

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $|x-1| - |2x-1| = 0$

2. $|2x-1| - |x-1| = 2$

3. $|x+2| - 3|2x-3| = 2-x$

Exercice 4

Résoudre dans \mathbb{R} :

1. $\frac{x+1}{2} - \frac{2x-3}{3} = 1 - \frac{2-x}{2}$

2. a) $\sqrt{x-1} = 0$ b) $\sqrt{x-1} = 2$ c) $\sqrt{x-1} = -2$

Exercice 5

Trois enfants se partagent une certaine somme d'argent. Le premier reçoit un quart de la somme totale. Le second reçoit les deux tiers de cette somme. Sachant que le premier enfant a reçu 120 dinars, calculer la somme d'argent perçue par le troisième.

Exercice 6

Une mère a 30 ans, sa fille a 4 ans.

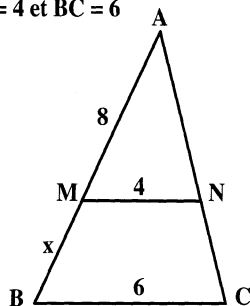
Dans combien d'années l'âge de la mère sera-t-il le triple de celui de sa fille?

Exercice 7

Déterminer la distance x du segment $[BM]$ sachant que :

$(MN) \parallel (BC)$ et $AM = 8$; $BM = x$

$MN = 4$ et $BC = 6$



Exercice 8

Résoudre dans \mathbb{R} chacune des inéquations suivantes :

1) $(x-1)(2-x) \geq 0$ 2) $(3x+2) - 3x^2 - 2x < 0$

3) $x^2 - 1 \leq x + 1$ 4) $(3x+2)^2 \geq (x-2)^2$

5) $(x-2)(x^2-1) \leq 0$

Exercice 9

1) Sachant que $2,7 < e < 2,8$, donner un encadrement de chacune des expressions suivantes : $3e$, $e+3$ et $-4e$

2) Résoudre dans \mathbb{R}

a) $|x-1| \leq 2$ b) $2 < |2x-1| \leq 8$

c) $|2x-1| \leq |x+2|$ d) $\sqrt{(x+4)^2} - 3 < 0$

e) $\frac{|x-2|}{x-2} = 1$ f) $|x-2| + x - 2 = 0$

IV. Corrigés des exercices (je maîtrise mes connaissances)

Exercice 1

1. $\frac{x+2}{3} = \frac{x-1}{7}$ équivaut à $7(x+2) = 3(x-1)$

équivaut à $7x + 14 = 3x - 3$

équivaut à $7x - 3x = 14 - 3$

équivaut à $4x = 11$ équivaut à $x = \frac{11}{4}$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{11}{4} \right\}$$

2. $\frac{x+2}{3} + \frac{x-1}{7} = 5$ équivaut à $\frac{7(x+2) + 3(x-1)}{21} = 5$

équivaut à $7(x+2) + 3(x-1) = 5 \times 21$ équivaut à $7x + 14 + 3x - 3 = 105$

équivaut à $10x = 105 - 14 + 3$ équivaut à $10x = 94$

équivaut à $x = \frac{94}{10} = \frac{47}{5}$ donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{47}{5} \right\}$

3. $x + \frac{x+1}{2} - \frac{x+2}{3} = \frac{1}{6}(3x+1)$

équivaut à $\frac{6x + 3(x+1) - 2(x+2)}{6} = \frac{7x+1}{6}$

équivaut à $\frac{6x + 3x + 3 - 2x - 4}{6} = \frac{7x+1}{6}$

équivaut à $7x - 1 = 7x + 1$ équivaut à $0 \times x = 2$ impossible

$S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

4. $x\sqrt{2} + x - 2 = 0$ équivaut à $x(1 + \sqrt{2}) = 2$

équivaut à $x = \frac{2}{1 + \sqrt{2}}$

équivaut à $x = \frac{2(1 - \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})}$

équivaut à $x = \frac{2(1 - \sqrt{2})}{1 - 2} = -2(1 - \sqrt{2})$

$$S_{\mathbb{R}} = \{-2(1 - \sqrt{2})\}$$

$$\begin{aligned}
 5. a) |2x-4| &= 6 \text{ équivaut à } 2x-4=6 \text{ ou } 2x-4=-6 \\
 &\text{équivaut à } 2x=10 \text{ ou } 2x=-2 \\
 &\text{équivaut à } x=5 \text{ ou } x=-1
 \end{aligned}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{-1, 5\}$$

$$\begin{aligned}
 b) |2x-6| + |x-9| &= 0 \text{ équivaut à } |2x-6|=0 \text{ et } |x-9|=0 \\
 &\text{équivaut à } 2x-6=0 \text{ et } x-9=0 \\
 &\text{équivaut à } x=3 \text{ et } x=9 \text{ impossible}
 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } S_{\mathbb{R}} = \emptyset$$

$$\begin{aligned}
 c) |4x-6| + |6x-9| &= 10 \text{ équivaut à } 2|2x-3| + 3|2x-3| = 10 \\
 &\text{équivaut à } |2x-3|(2+3) = 10
 \end{aligned}$$

$$\text{équivaut à } |2x-3| = \frac{10}{5} = 2$$

$$\text{équivaut à } 2x-3=2 \text{ ou } 2x-3=-2$$

$$\text{équivaut à } 2x=5 \text{ ou } 2x=1$$

$$\text{équivaut à } x = \frac{5}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right\}$$

$$6. x^2 - 4 = (x-1)(x-3) \text{ équivaut à } x^2 - 4 = x^2 - 3x - x + 3$$

$$\text{équivaut à } x^2 - 4 - x^2 - 3 = -4x \text{ équivaut à } -7 = -4x$$

$$\text{équivaut à } x = \frac{7}{4} \text{ d'où } S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{7}{4} \right\}$$

Exercice 2

$$1. (2x+1)(3x-4) - (2x+1)(x-1) + 6(2x+1) = 0$$

$$\text{équivaut à } (2x+1)(3x-4-(x-1)+6) = 0$$

$$\text{équivaut à } (2x+1)(3x-4-x+1+6) = 0$$

$$\text{équivaut à } (2x+1)(2x+3) = 0 \text{ équivaut à } 2x+1=0 \text{ ou } 2x+3=0$$

$$\text{équivaut à } x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = -\frac{3}{2} \text{ d'où } S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\}$$

$$2. \frac{(x-2)^2 - 9(2x-1)^2}{3} = 0 \text{ équivaut à } (x-2)^2 - 9(2x-1)^2 = 0$$

$$\text{équivaut à } (x-2)^2 - [3(2x-1)]^2 = 0$$

$$\text{équivaut à } (x-2-3(2x-1))(x-2+3(2x-1)) = 0$$

$$\text{équivaut à } (x-2-6x+3)(x-2+6x-3) = 0$$

$$\text{équivaut à } (-5x+1)(7x-5) = 0 \text{ équivaut à } -5x+1=0 \text{ ou } 7x-5=0$$

$$\text{équivaut à } -5x = -1 \text{ ou } 7x = 5 \text{ équivaut à } x = \frac{1}{5} \text{ ou } x = \frac{5}{7}$$

$$\text{d'où } S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{1}{5}, \frac{5}{7} \right\}$$

$$3. (x-1)^2 - (2x+3)^2 = x+4$$

$$\text{équivaut à } (x-1+2x+3)(x-1-2x-3) = x+4$$

$$\text{équivaut à } (3x+2)(-x-4) - (x+4) = 0$$

$$\text{équivaut à } -(3x+2)(x+4) - (x+4) = 0 \text{ équivaut à } (x+4)(-3x-2-1) = 0$$

$$\text{équivaut à } (x+4)(-3x-3) = 0 \quad \text{équivaut à } x+4=0 \text{ ou } -3x-3=0$$

$$\text{équivaut à } x = -4 \text{ ou } x = -1 \text{ d'où } S_{\mathbb{R}} = \{-4, -1\}$$

$$4. \text{ On rappelle que : } \boxed{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)}$$

$$(x-1)^3 - (x+1)^3 = -2$$

$$\text{équivaut à } (x-1-x-1) \left[(x-1)^2 + (x-1)(x+1) + (x+1)^2 \right] = -2$$

$$\text{équivaut à } -2 \left[(x-1)(x-1+x+1) + (x+1)^2 \right] = -2$$

$$\text{équivaut à } -2 \left[2x(x-1) + (x+1)^2 \right] = -2$$

$$\text{équivaut à } -2 \left[2x^2 - 2x + x^2 + 2x + 1 \right] = -2$$

$$\text{équivaut à } -2 \left[3x^2 + 1 \right] = -2 \text{ équivaut à } -6x^2 - 2 + 2 = 0$$

$$\text{équivaut à } -6x^2 = 0 \text{ équivaut à } x = 0 \text{ d'où } S_{\mathbb{R}} = \{0\}$$

$$5. \sqrt{4x^2 - 28x + 49} = 9 \text{ équivaut à } \sqrt{(2x)^2 - 2 \times 2x \times 7 + 7^2} = 9$$

$$\text{équivaut à } \sqrt{(2x-7)^2} = 9 \text{ équivaut à } |2x-7| = 9$$

$$\text{équivaut à } 2x-7=9 \text{ ou } 2x-7=-9$$

$$\text{équivaut à } 2x=16 \text{ ou } 2x=-2 \text{ équivaut à } x=8 \text{ ou } x=-1$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{-1, 8\}$$

$$\begin{aligned}
 6. \quad 4x^2 - 4x = -1 & \text{ équivaut à } 4x^2 - 4x + 1 = 0 \text{ équivaut à } (2x)^2 - 2 \times 2x + 1^2 = 0 \\
 & \text{ équivaut à } (2x-1)^2 = 0 \\
 & \text{ équivaut à } 2x-1=0 \text{ signifie } x = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

Exercice 3

Soit x un réel, on appelle **valeur absolue** de x notée $|x|$ le nombre positif

$$\text{défini par: } \begin{cases} |x| = x & \text{si } x \geq 0 \\ |x| = -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$1. \quad |x-1| - |2x-1| = 0 \text{ équivaut à } |x-1| = |2x-1|$$

$$\text{équivaut à } x-1 = 2x-1 \text{ ou } x-1 = -2x+1$$

$$\text{équivaut à } 0 = x \text{ ou } 3x = 2 \text{ équivaut à } x = 0 \text{ ou } x = \frac{2}{3}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{2}{3}, 0 \right\}$$

$$2. \quad |2x-1| - |x-1| = 2$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$ 2x-1 $	$-2x+1$	0	$2x-1$	$2x-1$
$ x-1 $	$-x+1$	$-x+1$	0	$x-1$
$ 2x-1 - x-1 $	$-x$	$3x-2$	x	

$$\bullet \text{ Si } x \in \left] -\infty, \frac{1}{2} \right] : |x-1| - |2x-1| = 2 \text{ équivaut à } -x = 2$$

$$\text{équivaut à } x = -2 \text{ donc } S_{\left] -\infty, \frac{1}{2} \right]} = \{-2\}$$

$$\bullet \text{ Si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] : |x-1| - |2x-1| = 2 \text{ équivaut à } 3x-2 = 2$$

$$\text{équivaut à } 3x = 4 \text{ équivaut à } x = \frac{4}{3} \text{ or } \frac{4}{3} \notin \left[\frac{1}{2}, 1 \right], \text{ donc } S_{\left[\frac{1}{2}, 1 \right]} = \emptyset$$

$$\bullet \text{ Si } x \in [1, +\infty[: |x-1| - |2x-1| = 2 \text{ équivaut à } x = 2, \text{ donc } S_{[1, +\infty[} = \{2\}$$

$$\text{Conclusion : } S_{\mathbb{R}} = S_{\left] -\infty, \frac{1}{2} \right]} \cup S_{\left[\frac{1}{2}, 1 \right]} \cup S_{[1, +\infty[} = \{-2, 2\}$$

$$3. |x+2| - 3|2x-3| = 2-x$$

x	$-\infty$	-2	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$ x+2 $	$-x-2$	0	$x+2$	$x+2$
$ 2x-3 $	$-2x+3$	$-2x+3$	0	$2x-3$

• Si $x \in]-\infty, -2]$:

$$|x+2| - 3|2x-3| = 2-x \quad \text{équivalent à} \quad -x-2-3(-2x+3) = 2-x$$

$$\text{équivalent à} \quad -x-2+6x-9-2+x=0 \quad \text{équivalent à} \quad 6x=13$$

$$\text{équivalent à} \quad x = \frac{13}{6} \notin]-\infty, -2] \quad \text{donc } S_{]-\infty, -2]} = \emptyset$$

• Si $x \in \left[-2, \frac{3}{2}\right]$: $|x+2| - 3|2x-3| = 2-x$

$$\text{équivalent à} \quad x+2-3(-2x+3) = 2-x \quad \text{équivalent à} \quad x+2+6x-9-2+x=0$$

$$\text{équivalent à} \quad 8x-9=0 \quad \text{équivalent à} \quad x = \frac{9}{8} \in \left[-2, \frac{3}{2}\right], \text{ donc } S_{\left[-2, \frac{3}{2}\right]} = \left\{\frac{9}{8}\right\}.$$

• Si $x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right]$: $|x+2| - 3|2x-3| = 2-x$ équivalent à

$$x+2-3(2x-3) = 2-x \quad \text{équivalent à} \quad x+2-6x+9-2+x=0$$

$$\text{équivalent à} \quad -4x+9=0 \quad \text{équivalent à} \quad x = \frac{9}{4} \quad \text{donc } S_{\left[\frac{3}{2}, +\infty\right]} = \left\{\frac{9}{4}\right\}$$

$$\text{Conclusion : } S_{\mathbb{R}} = S_{]-\infty, -2]} \cup S_{\left[-2, \frac{3}{2}\right]} \cup S_{\left[\frac{3}{2}, +\infty\right]} = \left\{\frac{9}{8}, \frac{9}{4}\right\}$$

Exercice 4

$$1. \frac{x+1}{2} - \frac{2x-3}{3} = 1 - \frac{2-x}{2} \quad \text{équivalent à} \quad \frac{3(x+1)-2(2x-3)}{6} = \frac{2-2+x}{2}$$

$$\text{équivalent à} \quad 2[3(x+1)-2(2x-3)] = 6x$$

$$\text{équivalent à} \quad 2[3x+3-4x+6] = 6x$$

$$\text{équivalent à} \quad 2(-x+9) = 6x \quad \text{équivalent à} \quad -2x+18 = 6x$$

$$\text{équivalent à} \quad -8x = -18 \quad \text{équivalent à} \quad x = \frac{-18}{-8} = \frac{9}{4} \quad \text{donc } S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{9}{4}\right\}$$

2. a) $\sqrt{x-1}=0$ Condition : $x \geq 1$.

$\sqrt{x-1}=0$ équivaut à $x-1=0$ équivaut à $x=1$. $S_{\mathbb{R}} = \{1\}$

b) $\sqrt{x-1}=2$ Condition : $x \geq 1$.

$\sqrt{x-1}=2$ équivaut à $x-1=4$ équivaut à $x=5$. $S_{\mathbb{R}} = \{5\}$

c) $\sqrt{x-1}=-2$ impossible car $\sqrt{x-1} \geq 0$, donc $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.

Exercice 5

En notant x la somme totale, et a la somme d'argent perçue par le troisième

on sait que : $\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}x + ax = x$

soit $\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + a = 1$ équivaut à $a = 1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{3}$ équivaut à $a = \frac{12-3-8}{12} = \frac{1}{12}$

Le troisième enfant reçoit donc un douzième de la somme totale.

On sait de plus que $\frac{1}{4}x = 120$ donc $x = 480$.

La somme perçue par le troisième enfant est donc $\frac{480}{12} = 40$ soit 40 dinars.

Exercice 6

Soit x le nombre d'années où l'âge de la mère sera le triple de celui de sa fille.

$30 + x = 3 \times (4+x)$ équivaut à $30 + x = 12 + 3x$

équivaut à $2x = 18$ équivaut à $x = 9$

Dans 9 ans, l'âge de la mère ($30+9=39$ ans) sera bien le triple de celui de sa fille ($4+9=13$ ans).

Exercice 7

On a : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ signifie

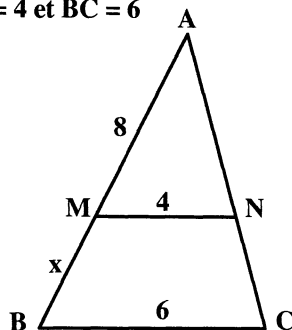
$$\frac{8}{8+x} = \frac{AN}{AC} = \frac{4}{6}, \text{ d'où } \frac{8}{8+x} = \frac{4}{6}$$

signifie $48 = 4(8+x)$, signifie

$$48 = 32 + 4x \text{ signifie } 4x = 16$$

signifie $x = 4$.

(MN) // (BC) et $AM = 8$; $BM = x$
 $MN = 4$ et $BC = 6$



Exercice 8

1. $(x-1)(2-x) \geq 0$

- $(x-1)(2-x) = 0$ équivaut à
 $x-1 = 0$ ou $2-x = 0$ équivaut à
 $x = 1$ ou $x = 2$
- d'après le tableau de signe

$S_{\mathbb{R}} = [1, 2]$.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$x - 1$	-	0	+	+	
$2 - x$	+	+	0	-	
$(x - 1)(2 - x)$	-	0	+	0	-

2. $(3x+2)-3x^2-2x < 0$ équivaut à

$(3x+2)-x(3x+2) < 0$ équivaut à

$(3x+2)(1-x) < 0$

- tableau de signe de $(3x+2)(1-x)$

$3x+2 = 0$ équivaut à $x = -\frac{2}{3}$;

$1-x = 0$ équivaut à $x = 1$.

- d'après le tableau de signe

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty, -\frac{2}{3}[\cup]1, +\infty[$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	1	$+\infty$	
$3x + 2$	-	0	+	+	
$1 - x$	+	+	0	-	
$(3x + 2)(1 - x)$	-	0	+	0	-

3. $x^2-1 \leq x+1$ équivaut à $(x-1)(x+1)-(x+1) \leq 0$

équivaut à $(x+1)(x-1-1) \leq 0$

équivaut à $(x+1)(x-2) \leq 0$

- tableau de signe de $(x+1)(x-2)$

$x+1 = 0$ équivaut à $x = -1$

$x-2 = 0$ équivaut à $x = 2$.

- d'après le tableau de signe $S_{\mathbb{R}} = [-1, 2]$.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$x + 1$	-	0	+	+	
$x - 2$	-	-	0	+	
$x \cdot (x-2) \cdot x$	+	0	-	0	+

4. $(3x+2)^2 \geq (x-2)^2$

équivaut à $(3x+2)^2 - (x-2)^2 \geq 0$

équivaut à $(3x+2+x-2)(3x+2-x+2) \geq 0$

équivaut à $4x(2x+4) \geq 0$

équivaut à $8x(x+2) \geq 0$ équivaut à $x(x+2) \geq 0$

- tableau de signe de $x(x+2)$.

Donc $S_{\mathbb{R}} =]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$x+2$	-	0	+	+	
x	-	-	0	+	
$x(x+2)$	+	0	-	0	+

$$5. (x-2)(x^2-1) \leq 0$$

$$(x-2)(x^2-1) = (x-2)(x-1)(x+1)$$

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$		
$x + 1$	-	0	+	+	+		
$x - 1$	-	-	0	+	+		
$x - 2$	-	-	-	0	+		
$(x-2)(x-1)(x+1)$	-	0	+	0	-	0	+

$$\text{D'où } S_{\mathbb{R}} =]-\infty, -1] \cup [1, 2]$$

Exercice 9

$$1. \bullet 2,7 < e < 2,8 \text{ signifie } 3 \times 2,7 < 3e < 3 \times 2,8 \text{ signifie } 8,1 < 3e < 8,4$$

$$\bullet 2,7 < e < 2,8 \text{ signifie } 2,7 + 3 < e + 3 < 2,8 + 3 \text{ signifie } 5,7 < e + 3 < 5,8$$

$$\bullet 2,7 < e < 2,8 \text{ signifie } -4 \times 2,7 > -4e > -4 \times 2,8 \text{ signifie } -11,2 < -4e < -10,2$$

$$2. a) |x-1| \leq 2 \text{ équivaut à } -2 \leq x-1 \leq 2 \text{ équivaut à } -1 \leq x \leq 3 \text{ d'où } S_{\mathbb{R}} = [-1, 3]$$

A retenir : pour $a \geq 0$

$$\bullet |x| \leq a \text{ équivaut à } -a \leq x \leq a \text{ équivaut à } x \in [-a, a]$$

$$\bullet |x| \geq a \text{ équivaut à } x \in]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$$

$$b) 2 \leq |2x-1| \leq 8 \text{ équivaut à } 2 \leq 2x-1 \leq 8 \text{ ou } -8 \leq 2x-1 \leq -2$$

$$\text{équivaut à } 3 \leq 2x \leq 9 \text{ ou } -7 \leq 2x \leq -1 \text{ équivaut à } \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{9}{2} \text{ ou } \frac{-7}{2} \leq x \leq \frac{-1}{2}$$

$$\text{d'où } S_{\mathbb{R}} = \left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2} \right] \cup \left[\frac{-7}{2}, \frac{-1}{2} \right].$$

$$c) |2x-1| \leq |x+2| \text{ équivaut à } |2x-1|^2 \leq |x+2|^2$$

$$\text{équivaut à } (2x-1)^2 \leq (x+2)^2$$

$$\text{équivaut à } (2x-1)^2 - (x+2)^2 \leq 0$$

$$\text{équivaut à } (2x-1-x-2)(2x-1+x+2) \leq 0$$

$$\text{équivaut à } (x-3)(3x+1) \leq 0$$

$$\bullet \text{Tableau de signe de } (x-3)(3x+1).$$

$$\text{Donc } S_{\mathbb{R}} = \left[-\frac{1}{3}, 3 \right].$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	3	$+\infty$	
$3x + 1$	-	0	+	+	
$x - 3$	-	-	0	+	
$(3x + 1)(x - 3)$	+	0	-	0	+

d) $\sqrt{(x+4)^2} - 3 < 0$ équivaut à $|x+4| - 3 < 0$ $\sqrt{a^2} = |a|$

équivaut à $|x+4| < 3$ équivaut à $-3 < x+4 < 3$,

équivaut à $-7 < x < -1$ d'où $S_{\mathbb{R}} =]-7, -1[$

e) $\frac{|x-2|}{x-2} = 1$ équivaut à $|x-2| = x-2$ et $x \neq 2$

équivaut à $x-2 \geq 0$ et $x \neq 2$

équivaut à $x > 2$ d'où $S_{\mathbb{R}} =]2, +\infty[$

f) $|x-2| + x - 2 = 0$ équivaut à $|x-2| = -(x-2)$ $|a| = -a$ équivaut à $a \leq 0$

équivaut à $x-2 \leq 0$ équivaut à $x \leq 2$, donc $S_{\mathbb{R}} =]-\infty, 2]$

Fonctions linéaires

I. Activités pour bien assimiler mon cours

Activité 1 (Définition : fonction linéaire)

- 1) Soit x la longueur d'un côté d'un carré et soit y le périmètre de ce carré.

On a : $y = \dots\dots$

On dit que le périmètre est fonction linéaire de la longueur du côté.

- 2) Compléter

longueur d'un côté d'un carré x	1	2	4	7
périmètre de ce carré $4x$	4			

Définition : Soit a un nombre réel donné.

Lorsque l'on associe à chaque nombre x le produit ax , on définit la fonction linéaire de coefficient a .

Notation $f : x \mapsto ax$ (se lit : qui à x associe le nombre ax)

- On dit que $f(x) = ax$ est l'image de x par f .
- x est un antécédent de $f(x)$.
- On a : $f(0) = 0$ et $f(1) = a$

Activité 2

On considère les fonctions linéaires suivantes :

$f : x \mapsto f(x) = 2x$ et $g : x \mapsto g(x) = -2x$

- 1) Compléter :

x	0	2
$f(x)$		

x	0	-2
$g(x)$		

- 2) Représenter graphiquement dans un même repère (O, I, J) les fonctions linéaires f et g .

Soit f la fonction linéaire définie par : $f : x \mapsto ax$

L'ensemble des points de coordonnées $(x ; ax)$ est appelé représentation graphique de la fonction linéaire f .

Dans un repère (O, I, J) cette représentation est la droite passant par :

- l'origine du repère $O(0 ; 0)$
- le point de coordonnées $A(1 ; a)$

On dit que cette droite a pour équation : $y = ax$.

" a " est le coefficient directeur de la droite.

Il indique l'inclinaison " de la droite.

II. Corrigés des activités (bien assimiler mon cours)

Activité 1

1. Soit x la longueur d'un côté d'un carré et soit y le périmètre de ce carré

On a : $y = 4x$

On dit que le périmètre est fonction linéaire de la longueur du côté.

2.

longueur d'un côté d'un carré x	1	2	4	7
périmètre de ce carré $4x$	4	8	16	28

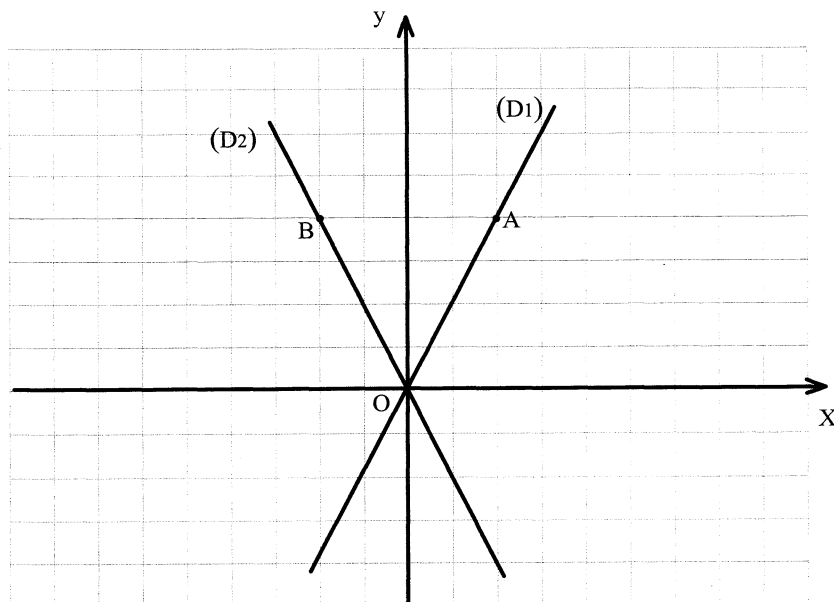
Activité 2

1.

x	0	2
$f(x)$	0	4

x	0	-2
$g(x)$	0	4

- 2.
- f est une fonction linéaire, sa représentation graphique est une droite D_1 qui passe par $O(0,0)$. Comme $f(2) = 4$, alors D_1 passe par le point de coordonnées $A(2; 4)$.
 - g est une fonction linéaire, sa représentation graphique est une droite D_2 qui passe par $O(0,0)$. Comme $g(-2) = 4$, alors D_2 passe par le point de coordonnées $B(-2; 4)$.



III. Exercices (je maîtrise mes connaissances)

Exercice 1

Dans la liste des fonctions suivantes, donner celles qui représentent des fonctions linéaires.

On précisera, dans ce cas, leur coefficient.

1) $f : x \mapsto 5x$	4) $f_1 : x \mapsto -3x$
2) $g : x \mapsto 4 + x$	5) $L : x \mapsto 2(x - 3) + 6$
3) $h : x \mapsto \frac{1}{4}x$	6) $k : x \mapsto 4x + 1$

Exercice 2

1. Soit f la fonction linéaire de coefficient -3

Calcule $f(-2)$, $f(1)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. Quelles sont les images par f de $\frac{4}{3}$; 4 et $\sqrt{3}$
3. Trouver l'antécédent de 9 .

Exercice 3

f est une fonction linéaire telle que : $f(2) = 5$.

- Déterminer son coefficient.
- Quelles sont les images par f de 1 , -6 , 0 ?
- Représenter graphiquement dans un repère (O, I, J) la fonction linéaire f .

Exercice 4

Application des fonctions linéaires aux pourcentages

- Un article subit une augmentation de 10% . Sachant que son prix initial était de 50 dinars, déterminer son prix après augmentation.
- Un article subit une augmentation de 10% . Sachant que son prix initial était de x dinars, déterminer son prix après augmentation. Quelle est la nature de la fonction associée.
- Un article subit une diminution de 20% . Sachant que son prix initial était de 50 dinars, déterminer son prix après diminution.
- Un article subit une diminution de 20% . Sachant que son prix initial était de x dinars, déterminer son prix après diminution.

Exercice 5

1. Un magasin de vêtements fait des soldes à -30%. Soit p le prix d'un article avant les soldes et p' son prix pendant les soldes.
 - a) Quel est le prix pendant les soldes d'un pantalon dont le prix avant les soldes était 60 dinars ?
 - b) Quel est le prix avant les soldes d'une veste soldée à 77 dinars
2.
 - a) Exprimer p' en fonction de p .
 - b) p' est-il l'image de p par une fonction linéaire?
3. Au bout d'un mois de soldes, les prix baissent à nouveau de 20%.
 - a) Si p'' est le nouveau prix d'un article après la nouvelle réduction de prix, exprimer p'' en fonction de p' et en déduire l'expression de p'' en fonction de p .
 - b) Après la deuxième réduction de prix, les prix avant les soldes ont-ils subi une réduction de 50%. Justifier la réponse

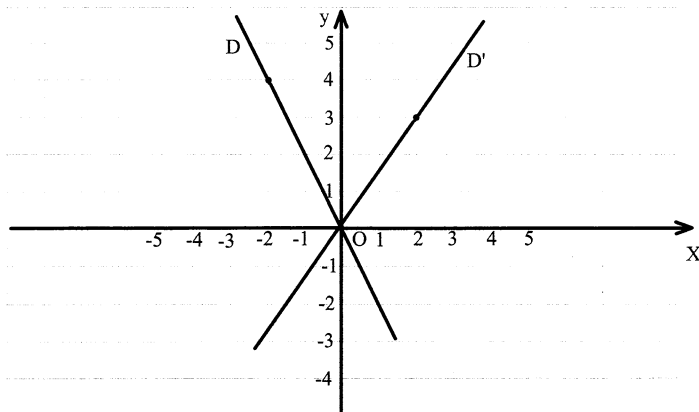
Exercice 6

Un magasin décide d'accorder une remise de 40% sur la vente de ses vêtements d'été.

1. Combien sera vendu un pantalon dont le prix était de 40 dinars ?
2. Soit x le prix d'un autre vêtement, exprimer son prix $p(x)$ après réduction, en fonction de x .
3. Quelle est la nature de la fonction p ?
4. Quel est le coefficient directeur de la représentation graphique de cette fonction ?

Exercice 7

Dans un repère (O, I, J) on considère les deux droites D et D' Représentant respectivement les fonction f et g .



1. Déterminer graphiquement $f(1)$ et $g(2)$.
2. Déterminer les antécédents de chacun des réels 4 et -2 par f .
3. Déterminer les coefficients de f et de g .

Exercice 8

Propriété : $d = v \times t$; d est la distance parcourue ; v est la vitesse moyenne et t = durée

A une vitesse moyenne v donnée, la distance parcourue d est proportionnelle à la durée du parcours t .

Exemple :

Un avion vole à une vitesse moyenne de 800 km/h

1. Quelle distance parcourt-il pendant 7h 45min ?
2. A la même vitesse combien de temps lui faudra-t-il pour parcourir 9600 km ?

Exercice 9

En navigation, on utilise le nœud comme unité de vitesse.

Sachant que 50 nœuds correspondent à 92,6 km/h, exprimer les deux applications linéaires qui permettent :

1. De transformer les nœuds en km/h
2. De transformer les km/h en nœuds.

Exercice 10

f est une fonction linéaire définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \left(\frac{m}{m+1}\right)x$ avec $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

On désigne par D la représentation graphique de f dans un repère (O, I, J)

- 1) Déterminer m pour que le point $A(2,4) \in D$
- 2) Pour la valeur trouvée de m représenter graphiquement f dans un repère (O, I, J) .

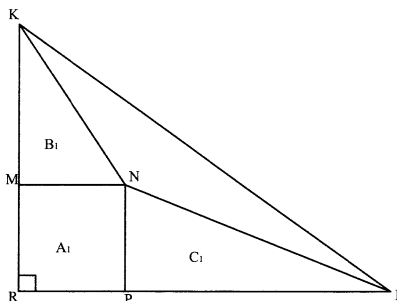
Exercice 11

RLK est un triangle rectangle en R, avec $RK = 6$ cm et $RL = 9$ cm.

M est un point quelconque du côté $[RK]$. On pose $RM = x$ (x en centimètres).

P est le point du segment $[RL]$ tel que $RP = RM = x$.

On place alors le point N pour que RMNP soit un carré.



1. Dans cette question $x = 2$. On obtient la figure précédente (on remarque que le point N se trouve à l'intérieur du triangle RKL).
 - a. Calculer l'aire du triangle RKL.
 - b. Calculer l'aire A_1 du carré RMNP.
Calculer l'aire B_1 du triangle KMN.
Calculer l'aire C_1 du triangle NPL.
Calculer $A_1 + B_1 + C_1$. Vérifier que l'aire du quadrilatère RKNL est inférieure à l'aire du triangle RKL.
2. Dans cette question $x = 5$
 - a. Faire une figure précise.
 - b. Où se trouve maintenant le point N par rapport au triangle RKL ?
 - c. On appelle maintenant A_2 l'aire du carré RMNP, B_2 l'aire du triangle KMN et C_2 l'aire du triangle NPL. Calculer ces trois aires et vérifier que l'aire de RKNL est supérieure à celle du triangle RKL.
3. On prend maintenant x quelconque.
 - a. Calculer l'aire A_3 du carré RMNP en fonction de x .
Calculer l'aire B_3 du triangle KMN en fonction de x .
Calculer l'aire C_3 du triangle NPL en fonction de x .
 - b. Montrer que $A_3 + B_3 + C_3 = \frac{15}{2}x$
 - c. On cherche s'il existe une valeur x pour laquelle le point N se trouve sur le segment [KL]. Pour cela, résoudre l'équation obtenue en écrivant :
 $A_3 + B_3 + C_3 = \text{Aire du triangle RKL}$. Conclure.
4. a. Dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) , représenter la fonction $x \mapsto \frac{15}{2}x$
pour x compris entre 0 et 6. On prendra : en abscisses : 5 cm pour 3 unités,
en ordonnées : 1 cm pour 3 unités.
 - b. Résoudre graphiquement l'équation $\frac{15}{2}x = 27$. Commenter.

IV. Corrigés des exercices (je maîtrise mes connaissances)

Exercice 1

1. f est une fonction linéaire de coefficient 5.
2. g n'est pas une fonction linéaire. Car $g(0) = 4$
3. h est une fonction linéaire de coefficient $\frac{1}{4}$
4. f_1 est une fonction linéaire de coefficient -3
5. $L(x) = 2(x - 3) + 6 = 2x - 6 + 6 = 2x$
 L est une fonction linéaire de coefficient 2.
6. k n'est pas une fonction linéaire car $k(0) = 1$

Exercice 2

1. f la fonction linéaire de coefficient 3 par suite $f(x) = -3x$
 - $f(-2) = (-3)(-2) = 6$
 - $f(1) = (-3)(1) = -3$
 - $f\left(\frac{1}{2}\right) = (-3)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$
2. $f\left(\frac{4}{3}\right) = -3 \times \left(\frac{4}{3}\right) = -4$
 $f(4) = -3 \times (4) = -12$
 $f(\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$
3. Il faut trouver x tel que $f(x) = 9$ équivaut à $-3x = 9$ soit $x = -3$ ainsi -3 a pour image 9 par f .

Exercice 3

1. On sait que f est une fonction linéaire, elle est donc de la forme :

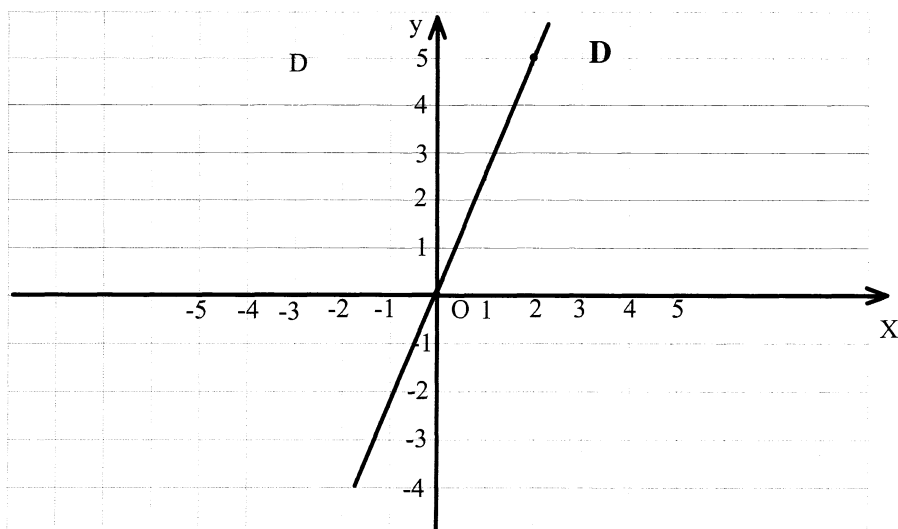
$$f(x) = ax$$

Or, $f(2) = 5$, donc : $2a = 5$. Son coefficient a est $\frac{5}{2}$

$$\text{d'où } f(x) = \frac{5}{2}x$$

2. • $f(1) = \frac{5}{2} \times (1) = \frac{5}{2}$
 - $f(-6) = \frac{5}{2} \times (-6) = -\frac{30}{2} = -15$
 - $f(0) = \frac{5}{2} \times (0) = 0$
3. la représentation graphique de f est une droite

$$D = \left\{ M \text{ du plan tel que } M\left(x; \frac{5}{2}x\right), x \in \mathbb{R} \right\}$$



Exercice 4

1. son prix après augmentation est de :

$$50 + \frac{10}{100} \times 50 = 50 + 0,1 \times 50 = 50 + 5 = 55$$

Après augmentation, l'article coûte 55 dinars

2. son prix après augmentation est de $x + \frac{10}{100}x = x + 0,1x = 1,1x$

Prix après augmentation : $y = 1,1x$.

D'où la fonction linéaire associée : $x \mapsto 1,1x$

3. son prix après diminution est de : $50 - \frac{20}{100} \times 50 = 50 - 0,2 \times 50$
 $= 50 - 10 = 40$

Après diminution, l'article coûte 40 dinars

4. son prix après diminution est de $x - \frac{20}{100}x = x - 0,2x = 0,8x$

Prix après diminution : $y = 0,8x$

D'où la fonction linéaire associée : $x \mapsto 0,8x$

Exercice 5

1. a) $p' = 60 - 60 \times \frac{30}{100} = 60 \times \left(1 - \frac{3}{10}\right) = 0,7 \times 60 = 42$

Pendant les soldes, le pantalon coûte 42 dinars.

b) $p - \frac{30}{100}p = 77$ équivaut à $0,7p = 77$ équivaut à $p = \frac{77}{0,7}$

équivaut à $p = 110$ dinars

Avant les soldes, la veste coûtait 110 dinars.

2. a) Expression de p' en fonction de p :

$$p' = p - \frac{30}{100}p = p - \frac{3}{10}p = p \left(1 - \frac{3}{10}\right) \text{ équivaut à } p' = \frac{7}{10}p$$

équivaut à $p' = 0,7p$

- b) Puisque $p' = 0,7p$, alors p' est l'image de p par une fonction linéaire.
La fonction linéaire est $f(x) = 0,7x$

3. a) $p'' = p' - \frac{20}{100}p'$ équivaut à $p'' = p' - \frac{2}{10}p'$ équivaut à $p'' = (1 - 0,2)p'$

équivaut à $p'' = 0,8p'$

Or, $p' = 0,7p$, donc : $p'' = 0,8 \times 0,7p = 0,56p$

- b) Comme $0,56 > 0,50$, alors les prix avant les soldes n'ont pas subi une réduction de 50%.

Exercice 6

1. Un pantalon dont le prix était de 60 dinars sera vendu

$$40 - \frac{40}{100} \times 40 = 40 - 16 = 24 \text{ dinars}$$

2. $p(x) = x - \frac{40}{100} \cdot x$

$$p(x) = x - 0,4x \text{ équivaut à } p(x) = 0,6x$$

3. p est une fonction linéaire de coefficient de linéarité 0,6.

4. Le coefficient directeur de la représentation graphique de cette fonction est 0,6.

Exercice 7

1. $f(1) = -2$; $g(2) = 3$

2. 4 a pour antécédent -2 par f car le point $(-2, 4)$ appartient à D .
-2 a pour antécédent 1 par f car le point $(1, -2)$ appartient à D .

3. f est une fonction linéaire et D a pour équation : $y = ax$

et on a : $f(1) = -2$ donc $a = -2$, d'où $f(x) = -2x$

g est une fonction linéaire et D' a pour équation : $y = ax$

et on a : $g(2) = 3$ donc $3 = 2a$ donc $a = \frac{3}{2}$, d'où $g(x) = \frac{3}{2}x$

Exercice 8

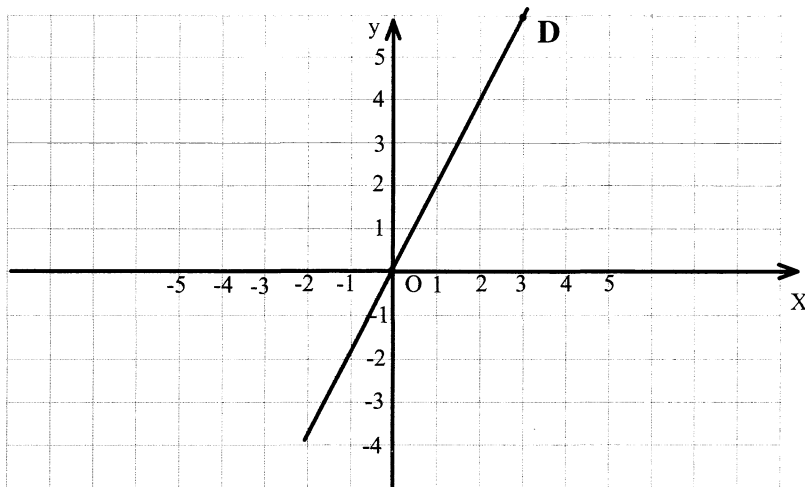
- $7\text{h}45\text{min} = 7,75 \text{ h}$
 $d = v \times t$
 $d = 800 \times 7,75 = 6200 \text{ km}$
- $d = v \times t$ équivaut à $9600 = 800 \times t$
équivaut à $t = \frac{9600}{800}$ équivaut à $t = 12\text{h}$

Exercice 9

- y désigne le nombre de nœuds et x le nombre de km/h
 $\frac{y}{50} = \frac{x}{92,6}$ équivaut à $x = 92,6 \times \frac{y}{50}$ équivaut à $x = 1,852y$
- Si y désigne le nombre de nœuds et x le nombre de km/h, alors
 $\frac{y}{50} = \frac{x}{92,6}$ équivaut à $y = \frac{50}{92,6} x \approx 0,54x$

Exercice 10

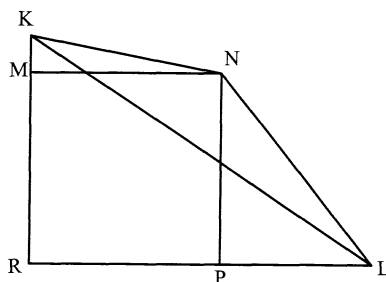
- $A(2,4) \in D : y = \left(\frac{m}{m+1}\right)x$ équivaut à $4 = \left(\frac{m}{m+1}\right) \times 2$
équivaut à $2 = \frac{m}{m+1}$ équivaut à $2(m+1) = m$
équivaut à $2m+2 = m$ équivaut à $m = -2$
- Pour $m = -2$ on a : $f(x) = 2x$



Exercice 11

1. a) $\text{Aire (RKL)} = \frac{6 \times 9}{2} = 27 \text{ cm}^2$.
- b) $A_1 = \text{Aire (RMNP)} = 2^2 = 4 \text{ cm}^2$
- $B_1 = \text{Aire (KMN)} = \frac{(KR - KM)MN}{2} = \frac{4 \times 2}{2} = 4 \text{ cm}^2$
- $C_1 = \text{Aire (NPL)} = \frac{(9 - 2) \times 2}{2} = 7 \text{ cm}^2$
- $A_1 + B_1 + C_1 = 15 \text{ cm}^2$
- $\text{Aire (RKNL)} = 15 \text{ cm}^2$
- $\text{Aire (RKL)} = 27 \text{ cm}^2$
- On a bien $\text{Aire (RKNL)} \leq \text{Aire (RKL)}$.

2. a) Voir figure :



- b) N se trouve à l'extérieur du triangle RKL.

- c) $A_2 = 5^2 = 25 \text{ cm}^2$

$$B_2 = \frac{\text{KMMN}}{2} = \frac{5}{2} = \text{cm}^2 = 2,5 \text{ cm}^2$$

$$C_2 = \frac{\text{PL} \times \text{PN}}{2} = \frac{4 \times 5}{2} = 10 \text{ cm}^2$$

$$\text{Aire (RKNL)} = A_2 + B_2 + C_2 = 37,5 \text{ cm}^2$$

On a donc à présent: $\text{Aire (RKNL)} \leq \text{Aire (RKL)}$.

3. a) $A_3 = x^2$. $B_3 = \frac{\text{KM} \times \text{MN}}{2} = \frac{(6 - x)x}{2} = 3x - \frac{x^2}{2}$.

$$C_3 = \frac{\text{PLNP}}{2} = \frac{(9 - x)x}{2} = \frac{9}{2}x - \frac{x^2}{2}$$

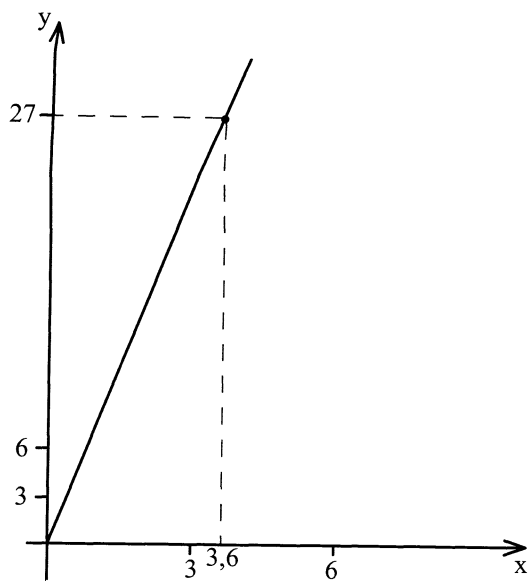
b) $A_3 + B_3 + C_3 = x^2 + \left(3x - \frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{9}{2}x - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{15}{2}x$.

c) $A_3 + B_3 + C_3 = \text{Aire (RKL)}$ d'où: $\frac{15}{2}x = 27$

$$\text{d'où : } x = \frac{27 \times 2}{15} = \frac{9 \times 2}{5} = \frac{18}{5} = 3,6.$$

Pour $x = 3,6$ l'aire du quadrilatère RKNL est égale à l'aire du triangle RKL: le point N se trouve alors sur le segment [K,L].

4. a) Voir figure :



b. voir figure ci-dessus.

La résolution graphique donne:

$$\frac{15x}{2} = 27 \text{ pour } x = 3,6: \text{ on retrouve la solution précédente.}$$

II. Corrigés des activités (bien assimiler mon cours)

Activité 1 (Définition d'une fonction affine)

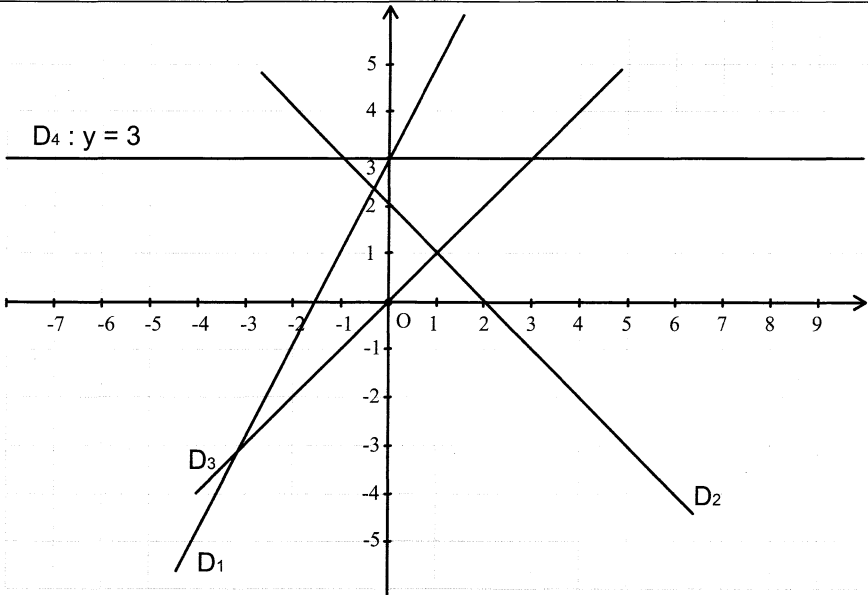
1. compléter le tableau suivant :

nombre de kilomètres parcourus	100	120	250	320	500
prix payé (Dinars)	30	32	45	52	70

2. Lorsque l'on parcourt x kilomètres, le prix y vaut : $y = (0,1) x + 20$

Activité 2 (Représentation graphique)

	$f(x) = 2x + 3$	$g(x) = -x + 2$	$h(x) = x$	$k(x) = 3$
Compléter	$f(-2) = -1$ $f(0) = 3$	$g(3) = -1$ $g(-1) = 3$	$h(3) = 3$ $h(0) = 0$	$k(0) = 3$ $k(1) = 3$
Nature de la fonction	affine	affine	linéaire	constante
La représentation graphique de la fonction est :	La droite D_1 : $y = 2x + 3$	La droite D_2 : $y = -x + 2$	La droite $D_3 : y = x$	La droite $D_4 : y = 3$

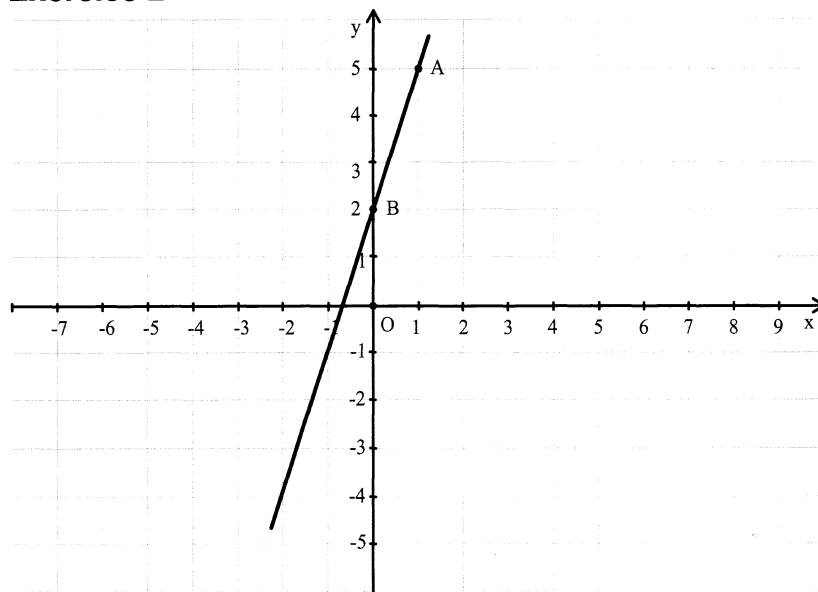


III. Exercices (je maîtrise mes connaissances)

Exercice 1

1. Trouver une fonction affine $f : x \mapsto ax - 3$ telle que l'image de 3 soit 6 .
2. Trouver une fonction affine $g : x \mapsto -2x + b$ telle que $g(2) = -3$.
3. Trouver une fonction affine h telle que son ordonnée à l'origine est 2 et $h(3) = 4$

Exercice 2



1. Lire et écrire les coordonnées des points A et B de la droite D.
2. Déterminer le coefficient directeur de la droite D.
3. Déterminer la fonction affine f représenté par D.
4. Déterminer l'intersection de D et de l'axe des abscisses

Exercice 3

Dans un repère orthonormé (O, I, J) représenter les applications affines suivantes

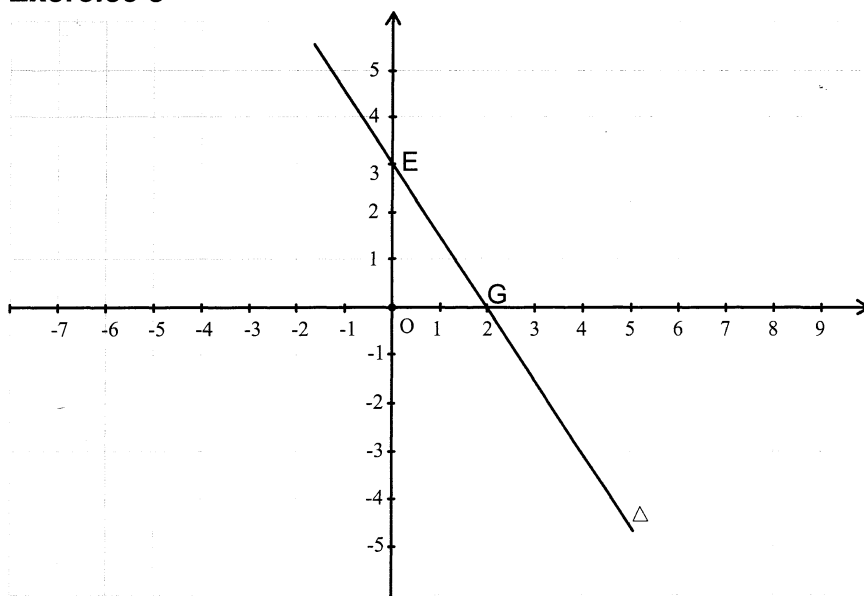
$$f : x \mapsto -2x + 3 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \frac{1}{3}x - 2$$

Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = -4x + 7$ pour tout réel x .

1. Quelle est le nom d'une telle fonction ?
2. Déterminer l'image de 3 par f .
3. Déterminer la valeur de x qui a pour image 5 par f .
4. Représenter graphiquement la fonction f

Exercice 5



Soit f la fonction affine associée à la droite Δ . Où $f(x) = ax + b$

1. Lire les coordonnées du point E , déterminer b .
2. Lire les coordonnées du point G , déterminer a . puis déterminer la fonction affine f .
3. Soit $B(6,-6)$ et $C(3,-1)$.

Préciser par le calcul si B et C sont des points de Δ .

Exercice 6

Soit l'application affine $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$x \mapsto 2x - 3$$

1. Calculer $f(2)$, $f(0)$ et l'antécédent de 3 par f .
2. Tracer la représentation graphique Δ de f dans un repère orthonormé (o, I, J) .
3. Soit $M(2m - 1, 3m - 2)$. Calculer m pour que M soit un point de Δ .
4. Soit g l'application affine définie sur \mathbb{R} par $g(6) = 2$ et $g(-3) = 5$
 - a) Déterminer l'application g puis tracer sa représentation graphique Δ' dans le même repère (o, I, J)
 - b) Les droites Δ et Δ' se coupent en un point K . Calculer les coordonnées de K .
5. Soit h l'application affine dont la représentation graphique est la droite Δ'' passant par le point $F(1, -2)$ et $\Delta'' \parallel \Delta$. Déterminer l'application h .

Exercice 7

Déterminer, dans chaque cas, l'application affine vérifiant les conditions proposées.

1. f est représentée par la droite passant par les points $A(-2 ; 7)$ et $B(3 ; 2)$
2. g est telle que $g(0) = 4$ et $g(3) = 6$
3. Le coefficient directeur de h est $-\frac{2}{3}$ et h représentée par une droite D passant par le point $C(1 ; 5)$
4. k est telle que $k(5) - k(1) = 3$ et $k(0) = 2$

Exercice 8

On donne les applications affines f et g définies sur \mathbb{R} par

$$f(x) = 2x - 5 \text{ et } g(x) = -\frac{3}{2}x + 2$$

1. Construire dans un même repère orthonormé $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$ les droites Δ_1 et Δ_2 les représentations graphiques respectives de f et g .
2. Déterminer les réels x et y pour que $A(2, y) \in \Delta_1$ et $B(x, -4) \in \Delta_2$.
3. Δ_1 coupe l'axe des abscisses ($x'x$) en E . Calculer les coordonnées de E .
4. On pose $C(4, 3)$ et $D(0, 2)$. Vérifier que $C \in \Delta_1$ et que $D \in \Delta_2$.
5. On pose I le milieu de $[CD]$. Calculer les coordonnées de I puis déterminer l'application affine h qui admet comme représentation graphique la droite (BI) .

Exercice 9

On donne l'application affine f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + 4$.

1. a) Calculer l'image de -4 par f et l'antécédent de $\frac{1}{2}$ par f
b) Tracer dans un repère orthonormé $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$ la représentation graphique D de f .
2. La droite D coupe l'axe des ordonnées en B . Calculer les coordonnées de B .
3. a) On donne $M(1, -3)$ et $N(-1, -1)$. Déterminer l'application affine g qui admet la droite (MN) comme représentation graphique.
b) Vérifier que le point $C(0, -2) \in (MN)$
4. a) Dire pourquoi les droites D et (MN) sont sécantes ?
b) Tracer dans le même repère $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$ la droite (MN) .
c) Déterminer les coordonnées du point A intersection de D et (MN)
5. On donne $AB = AC = 3\sqrt{2}$ et $BC = 6$
Vérifier que le triangle CAB est rectangle en A .

Exercice 10

1. Soit ABC un triangle tel que $AB = 10$ cm $BC = 9$ cm et $AC = 5$ cm .
Soit M est un point quelconque du segment $[AB]$. La parallèle à la droite (BC) menée par M coupe la droite (AC) en S .
 - a) Trouver deux quotients égaux à $\frac{AM}{AB}$. Justifier les réponses.
 - b) On pose $AM = x$, (donc $0 \leq x \leq 10$ cm) et $\frac{AM}{AB}$ s'écrit $\frac{x}{10}$. Exprimer en fonction de x les longueurs MS et AS .
 - c) Exprimer MB et SC en fonction de x .
2. a) Etablir que le périmètre du triangle AMS est $y_1 = 2,4x$, et que le périmètre du trapèze $MSCB$ est $y_2 = 24 - 0,6x$.
 - b) Compléter le tableau :

x	0	5	10
$y_1 = 2,4x$			
$y_2 = 24 - 0,6x$			

Représenter y_1 et y_2 en fonction de x dans un repère (O, I, J)

- c) Calculer x tel que $y_1 = y_2$.
Quelle est alors la mesure des périmètres de AMS et de $MSCB$?

IV. Corrigés des exercices (je maîtrise mes connaissances)

Exercice 1

1. On a $f(3) = 6$ donc : $a \times 3 - 3 = 6$ donc $3a = 9$ donc $a = 3$
 f est l'application affine : $x \mapsto 3x - 3$
2. On a $g(2) = -3$ donc : $-2 \times 2 + b = -3$ équivaut à $b = -3 + 4$ équivaut à $b = 1$,
 g est l'application affine : $x \mapsto -2x + 1$
3. $b = 2$ est l'ordonnée à l'origine de $h : x \mapsto ax + b$ donc $h(0) = 2$ d'où $b = 2$ et
par suite $h(x) = ax + 2$, or on a : $h(3) = 4$ donc $3a + 2 = 4$ d'où $3a = 2$ et par
suite $a = \frac{2}{3}$ d'où h est l'application affine $x \mapsto \frac{2}{3}x + 2$

Exercice 2

1. $A(1,5)$; $B(0,2)$
2. D est la représentation graphique d'une fonction affine f . Le coefficient directeur d'une fonction affine est définie par :

$$a = \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} \text{ pour tout } x \neq x'$$

$$\text{Dans ce cas } a = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{5 - 2}{1} = 3$$

3. On a : $f(0) = 2$, d'où l'ordonnée à l'origine de f est $b = 2$, le coefficient directeur de f est $a = 3$ donc $f : x \mapsto 3x + 2$.

4. Soit $M(x, y) \in D \cap (O, \vec{i})$ équivaut à $\begin{cases} M \in D \\ M \in (O, \vec{i}) \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$

$$\text{donc } f(x) = 0 \text{ équivaut à } 3x + 2 = 0 \text{ équivaut à } x = -\frac{2}{3}$$

$$\text{d'où } D \cap (O, \vec{i}) = \left\{ \left(-\frac{2}{3}, 0 \right) \right\}$$

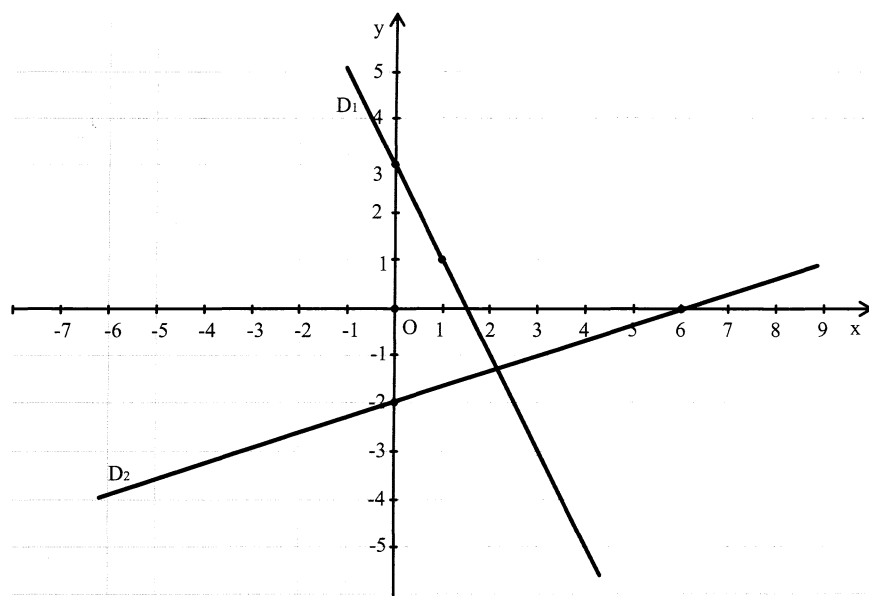
Exercice 3

Soit D_1 d'équation $y = -2x + 3$ la représentation graphique de f .

x	0	1
$y = -2x + 3$	3	1

Soit D_2 d'équation $y = \frac{1}{3}x - 2$ la représentation graphique de f .

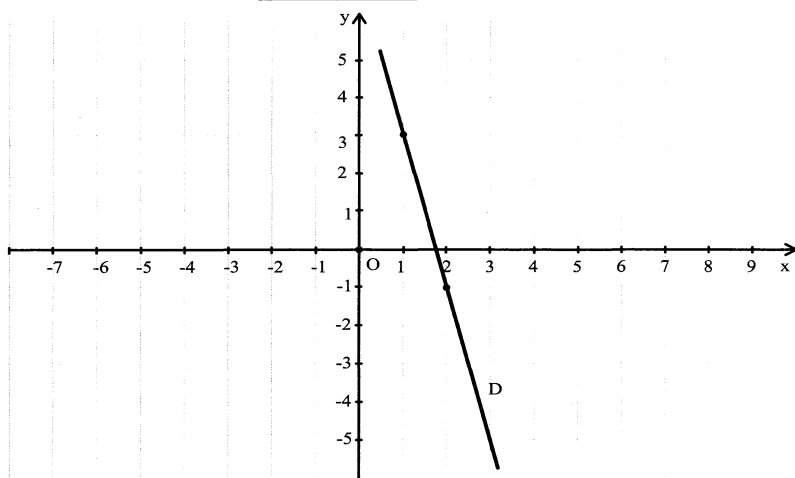
x	0	3
$y = \frac{1}{3}x - 2$	-2	-1



Exercice 4

1. $f(x) = -4x + 7$: f est une fonction affine.
2. L'image de 3 par f est : $f(3) = -4 \times 3 + 7 = -12 + 7 = -5$.
3. 5 est l'image de x donc $5 = -4x + 7$ d'où $4x = 7 - 5$ d'où $4x = 2$ d'où $x = \frac{1}{2}$;
 $\frac{1}{2}$ est l'antécédent de 5 par f .
4. Soit $D : y = -4x + 7$ la représentation graphique de la fonction f

x	1	2
$y = -4x + 7$	3	-1



Exercice 5

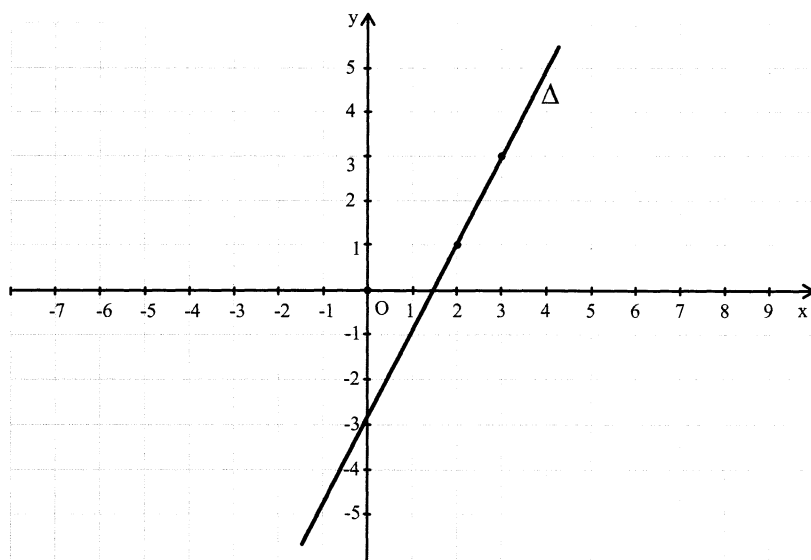
1. $E(0,3) \in \Delta$ équivaut à $f(0) = 3$ équivaut à $a+b = 3$ équivaut à $b = 3$.
2. $G(2,0) \in \Delta$ équivaut à $f(2) = 0$ d'où $2a + b = 0$ équivaut à $2a = -3$ d'où $a = -\frac{3}{2}$, par suite $f(x) = -\frac{3}{2}x + 3$
3. $f(6) = -\frac{3}{2} \times 6 + 3 = -9 + 3 = -6$ donc B appartient à Δ
 $\bullet f(3) = -\frac{3}{2} \times 3 + 3 = -\frac{9}{2} + 3 = -\frac{3}{2} \neq -1$ d'où $C(3; -1)$ n'appartient pas à Δ .

Exercice 6

1. $f(x) = 2x - 3$. $f(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$; $f(0) = -3$
l'antécédent x de 3 par f vérifie $f(x) = 3$ équivaut à $2x - 3 = 3$
équivaut à $2x = 6$
équivaut à $x = 3$

2. $\Delta: y = 2x - 3$

x	2	3
y	1	3



3. $M(2m-1, 3m-2) \in \Delta$ signifie $3m-2 = f(2m-1)$ équivaut à $3m-2 = 2(2m-1) - 3$ équivaut à $3m-2 = 4m-2-3$ équivaut à $-2+2+3 = 4m-3m$ équivaut à $3 = m$.

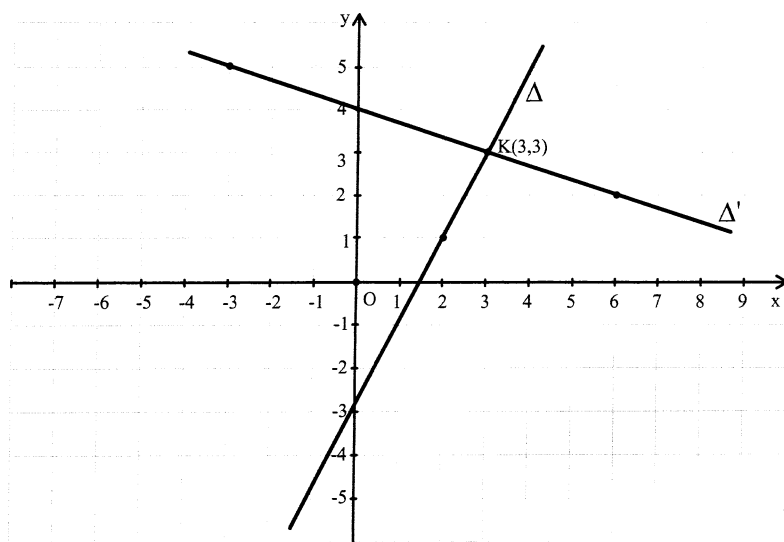
4. a) $g(x) = ax + b$

• $a = \frac{g(6) - g(-3)}{6 - (-3)} = \frac{2 - 5}{6 + 3} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$, d'où $g(x) = -\frac{1}{3}x + b$

• $g(-3) = 5$ équivaut à $-3a + b = 5$ équivaut à $-3\left(-\frac{1}{3}\right) + b = 5$

équivaut à $1 + b = 5$ d'où $b = 4$. Conclusion $g(x) = -\frac{1}{3}x + 4$

• Pour tracer la droite Δ' on place les points $A(6,2)$ et $B(-3,5)$ et on trace la droite $\Delta' = (AB)$



b) $K(x,y) \in \Delta \cap \Delta'$ équivaut à $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -\frac{1}{3}x + 4 \end{cases}$ donc $2x - 3 = -\frac{1}{3}x + 4$

équivaut à $2x - \frac{1}{3}x = 4 + 3$

équivaut à $\frac{7}{3}x = 7$ équivaut à $x = 3$

si $x = 3$ alors $y = 2 \times 3 - 3 = 6 - 3 = 3$ d'où $K(3,3)$.

5. $\Delta'' // \Delta$ donc h et f ont le même coefficient directeur $a = 2$, d'où $h(x) = 2x + b$

$F(1, -2) \in \Delta''$ donc $h(1) = -2$ équivaut à $2 + b = -2$ équivaut à $b = -4$

d'où $h(x) = 2x - 4$.

Exercice 7

L'application affine vérifiant les conditions :

1. f est représentée par la droite passant par le point $A(-2; 7)$
équivalent à $f(-2) = 7$, f est représentée par la droite passant par le point $B(3; 2)$
équivalent à $f(3) = 2$.

$$f(x) = ax + b. \text{ avec } a = \frac{f(-2) - f(3)}{-2 - 3} = \frac{7 - 2}{-5} = -1, \text{ d'où } f(x) = -x + b.$$

On remplace x par -2 et $f(x)$ par 7 : $2 + b = 7$, d'où $b = 5$ donc $f(x) = -x + 5$.

2. g est telle que $g(0) = 4$ et $g(3) = 6$. avec $g(x) = ax + b$, $g(0) = 4$,
donc $0 + b = 4$ d'où $b = 4$ donc $g(x) = ax + 4$.

$$g(3) = 6 \text{ équivaut à } 3a + 4 = 6 \text{ équivaut à } 3a = 2 \text{ équivaut à } a = \frac{2}{3}$$

$$\text{d'où } g(x) = \frac{2}{3}x + 4.$$

3. Le coefficient directeur de h est $-\frac{2}{3}$, donc $h(x) = -\frac{2}{3}x + b$. (D) passe par le

$$\text{point } C(1; 5) \text{ donc } h(1) = -\frac{2}{3} + b = 5 \text{ équivaut à } b = 5 + \frac{2}{3} = \frac{17}{3} \text{ d'où}$$

$$h(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{17}{3}.$$

4. k est une fonction affine donc $k(x) = ax + b$, avec $a = \frac{k(5) - k(1)}{5 - 1} = \frac{3}{4}$

$$\text{et } k(x) = \frac{3}{4}x + b. \text{ Si } k(0) = 2, \text{ alors } b = 2. \text{ Donc } k(x) = \frac{3}{4}x + 2.$$

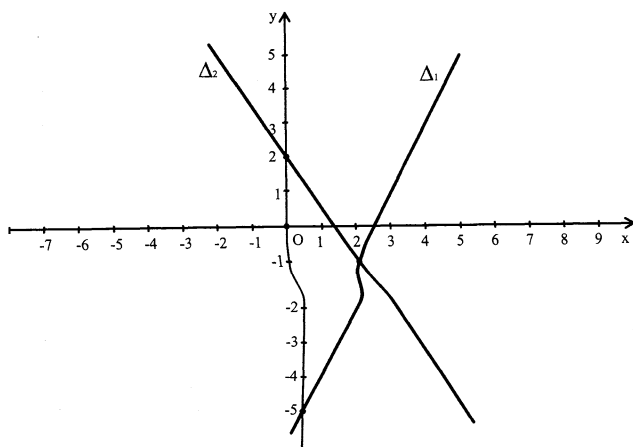
Exercice 8

1. $\Delta_1 : y = 2x - 5$,

x	2	0
$y = 2x - 5$	-1	-5

$$\Delta_2 : y = -\frac{3}{2}x + 2,$$

x	0	2
$y = -\frac{3}{2}x + 2$	2	-1



2. • $A(2, y) \in \Delta_1$ équivaut à $f(2) = y$
équivaut à $2 \times 2 - 5 = y$ équivaut à $-1 = y$ d'où $A(2, -1)$
- $B(x, -4) \in \Delta_2$ équivaut à $g(x) = -4$ équivaut à $-\frac{3}{2}x + 2 = -4$
équivaut à $-\frac{3}{2}x = -4 - 2$ équivaut à $-\frac{3}{2}x = -6$
équivaut à $x = -6 \left(-\frac{2}{3} \right) = 4$, d'où $B(4, -4)$.
3. $M(x, y) \in \Delta_1 \cap (x, x')$ équivaut à $\begin{cases} M \in \Delta_1 \\ M \in (x, x') \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = 0 \end{cases}$
Donc $2x - 5 = 0$ équivaut à $x = \frac{5}{2}$
 $\Delta_1 \cap (x, x') = \left\{ E \left(\frac{5}{2}, 0 \right) \right\}$
4. • $f(4) = 2(4) - 5 = 8 - 5 = 3$ donc $C(4, 3) \in \Delta_1$
• $g(0) = -\frac{3}{2} \times 0 + 2 = 2$ d'où $D(0, 2) \in \Delta_2$
5. I est le milieu de $[CD]$ équivaut à $\begin{cases} x_I = \frac{x_C + x_D}{2} \\ y_I = \frac{y_C + y_D}{2} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x_I = \frac{4+0}{2} = 2 \\ y_I = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2} \end{cases}$
d'où $I \left(2, \frac{5}{2} \right)$

- Soit $h : x \mapsto ax + b$ l'application dont sa représentation graphique est la droite (BI). $B \in (BI)$ signifie $h(4) = -4$ et $I \in (BI)$

signifie $h(2) = \frac{5}{2}$

- Le coefficient directeur de (BI) est : $a = \frac{h(4) - h(2)}{4 - 2} = \frac{-4 - \frac{5}{2}}{2} = -\frac{13}{4}$.

- $h(x) = -\frac{13}{4}x + b$

On a : $h(4) = -4$ équivaut à $-\frac{13}{4}(4) + b = -4$ équivaut à $b - 13 = -4$

équivaut à $b = 9$, d'où $h(x) = -\frac{13}{4}x + 9$.

Exercice 9

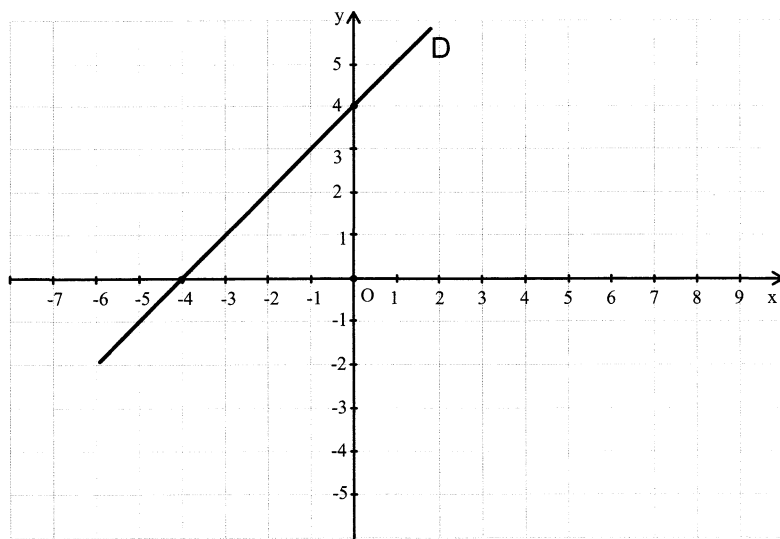
1. a) • $f(-4) = -4 + 4 = 0$

• antécédent de $\frac{1}{2}$ par f : $f(x) = \frac{1}{2}$ équivaut à $x + 4 = \frac{1}{2}$

équivaut à $x = \frac{1}{2} - 4$ équivaut à $x = -\frac{7}{2}$.

b) $D : y = x + 4$

x	-4	0
y	0	4



2. $D \cap (O, \vec{j}) = \{B(0, y)\}$. $B \in D$ signifie $y = 0 + 4 = 4$ signifie $B(0, 4)$

3. a. $g(x) = ax + b$.

• $a = \frac{g(1) - g(-1)}{1 - (-1)} = \frac{-3 + 1}{2} = -1$ d'où $g(x) = -x + b$.

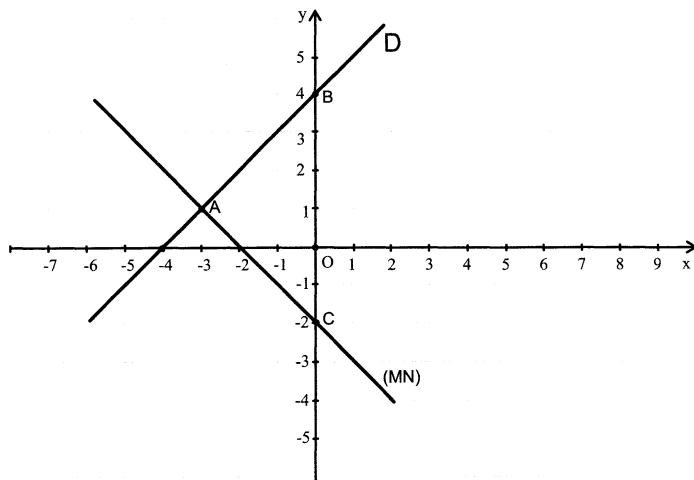
• $g(1) = -3$ équivaut à $-1 + b = -3$ équivaut à $b = -2$. d'où $g(x) = -x - 2$.

b. $(MN) : y = -x - 2$

$g(0) = 0 - 2 = -2$ donc $C(0, -2) \in (MN)$.

4. a. $f(x) = x + 4$ donc $a = 1$: coefficient directeur de D
et $g(x) = -x - 2$ donc $a = -1$: coefficient directeur de (MN)
 $1 \neq -1$ donc D et (MN) sont sécantes.

b)



c) On peut lire sur le graphique que $A(-3, 1)$

5. $AB^2 + AC^2 = 18 + 18 = 36 = BC^2$

donc le triangle CAB est rectangle en A.

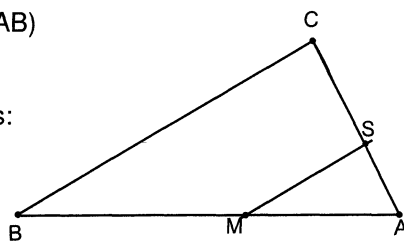
Exercice 10

1. a) $(MS) \parallel (BH)$, M est un point de (AB)

et S un point de (AC)

donc d'après l'énoncé de Thalès:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MS}{BC} = \frac{AS}{AC}.$$



$$b) \frac{x}{10} = \frac{MS}{9} = \frac{AS}{5}$$

$$\bullet \frac{x}{10} = \frac{MS}{9} \text{ équivaut à } MS = \frac{9}{10}x = 0,9x$$

$$\bullet \frac{x}{10} = \frac{AS}{5} \text{ équivaut à } AS = \frac{5}{10}x = 0,5x$$

$$c) MB = AB - AM = 10 - x, \quad SC = AC - AS = 5 - 0,5x$$

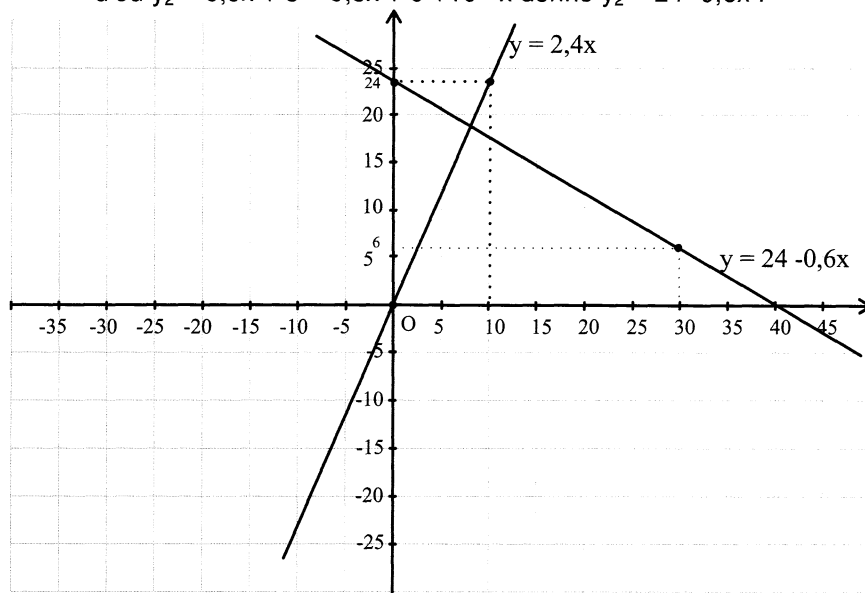
2. a) Soit y_1 le périmètre du triangle AMS, $y_1 = AM + MS + AS$ d'où

$$y_1 = x + 0,9x + 0,5x \text{ donne } y_1 = 2,4x.$$

Soit y_2 le périmètre du trapèze MSCB

$$y_2 = MS + CS + CB + MB$$

$$\text{d'où } y_2 = 0,9x + 5 - 0,5x + 9 + 10 - x \text{ donne } y_2 = 24 - 0,6x.$$



b)

x	0	5	10
$y_1 = 2,4x$	0	12	24
$y_2 = 24 - 0,6x$	24	21	18

$$c) y_1 = y_2 \text{ équivaut à } 2,4x = 24 - 0,6x \text{ équivaut à } 2,4x + 0,6x = 24$$

$$\text{équivaut à } 3x = 24 \text{ équivaut à } x = \frac{24}{3} = 8 \text{ cm.}$$

$$\text{Périmètres de AMS et de MSCB: } y_1 = y_2 = 2,4 \times 8 = 19,2 \text{ cm.}$$

Vecteurs et Translations

I. Activités pour bien assimiler mon cours

Activité 1 (Détermination d'un vecteur, caractérisation du milieu)

1. Tracer un triangle ABC quelconque.
Construire le point E tel que $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{BC}$
2. Construire le point D tel que : $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$
3. Montrer que A est le milieu de [ED].

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie [AD] et [BC] ont le même milieu
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$
- A, B, C et D sont des points non alignés ;
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie ABDC est un parallélogramme
- $\begin{cases} \text{A, B et C sont trois points distincts} \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \text{ signifie B est le milieu du segment [AC]} \end{cases}$

Activité 2 (Représentation d'un vecteur)

Etant donné un point O, et \vec{u} un vecteur.

Construire le point M du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ (Envisager les deux cas)

Soit O un point du plan. Pour tout vecteur \vec{u} il existe un seul point M du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

Activité 3 (Translations)

ABC est un triangle isocèle de sommet principal A.

1. Placer le point D tel que $t_{\overrightarrow{AB}}(C) = D$
2. Démontrer que (AD) et (BC) sont perpendiculaires.

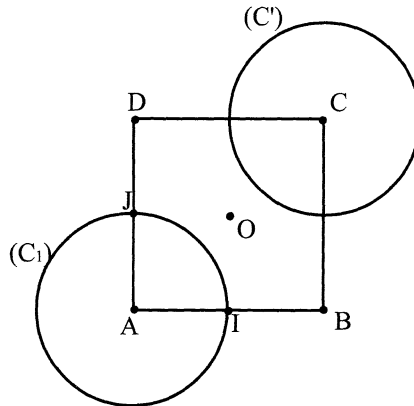
- $\begin{cases} \text{A, B et C sont trois points alignés} \\ \text{Si } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \text{ alors } AB = CD \text{ et A, B, C et D sont alignés} \end{cases}$
- $t_{\overrightarrow{AB}}(M) = M'$ signifie $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$

Activité 4 (Image d'une partie du plan par une Translation)

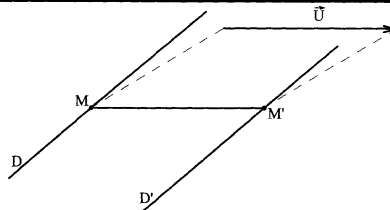
Soit un carré ABCD de centre O

I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AD]$.
Soit (C_1) le cercle de centre A et passant par I.

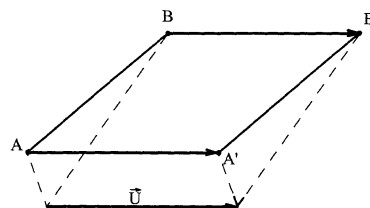
1. Construire les cercles (C_2) et (C_3) images de (C_1) par les translations de vecteurs respectifs \vec{AB} et \vec{AD} .
2. Soit (C') le cercle de centre C et de rayon AI. Quelle translation transforme (C_1) en (C') ?



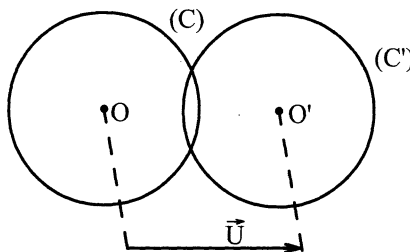
- L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle.



- L'image d'un segment par une translation est un segment qui lui est isométrique.



- L'image d'un cercle par une translation est un cercle de même rayon dont le centre est l'image du centre.



II. Corrigés des activités (bien assimiler mon cours)

Activité 1

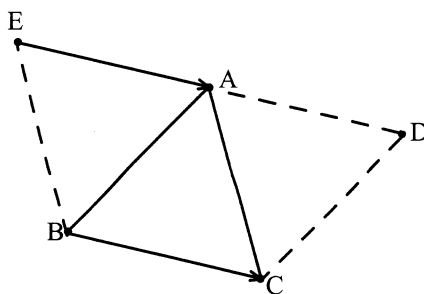
1. Comme $\overline{EA} = \overline{BC}$ et les points E, A, C et B ne sont pas alignés alors EACB est un parallélogramme.

Il faut donc construire le parallélogramme EACB

2. $\overline{BA} = \overline{CD}$ alors BADC est un parallélogramme. Il faut donc construire le parallélogramme BADC

3. Comme ABCD est un parallélogramme alors $\overline{BC} = \overline{AD}$.

Comme $\begin{cases} \overline{BC} = \overline{AD} \\ \overline{BC} = \overline{EA} \end{cases}$ alors $\overline{AD} = \overline{EA}$ d'où A est le milieu de [ED].

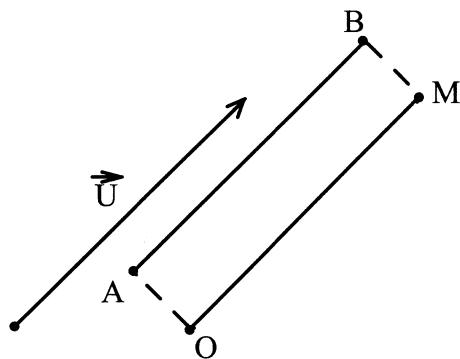


Activité 2

Etant donné un point O, et \vec{u} un vecteur.

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $\overline{OM} = \vec{0}$, donc $M = O$.
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors il existe deux points distincts A et B tel que $\vec{u} = \overline{AB}$, donc

$\overline{OM} = \overline{AB} \begin{cases} \text{Si } O \in (AB) \text{ alors } M \text{ est le point de } (AB) \text{ tel que } OM=AB \\ \text{Si } O \notin (AB) \text{ alors } OMBA \text{ est un parallélogramme.} \end{cases}$

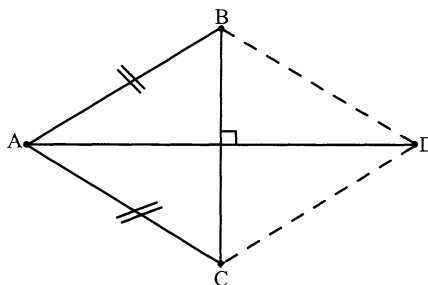


Activité 3

1. ABC est un triangle isocèle de sommet principal A.

$$t_{\overrightarrow{AB}}(C) = D \text{ signifie } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

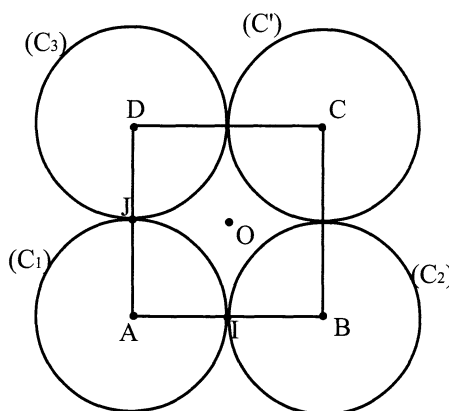
Signifie ABDC est un parallélogramme dont les extrémités de la diagonale [AD] représentent le vecteur \overrightarrow{AD} .



2. Comme ABC est isocèle de sommet principal A alors $AB=AC$.
Comme ABDC est un parallélogramme alors $AB=CD$ et $AC=BD$.
Comme $AB=AC$ et $AB=CD$ et $AC=BD$ alors $AB=BD=CD=AC$.
Comme $AB=BD=CD=AC$ alors ABDC est un losange.
Comme ABDC est un losange alors ses diagonales (AD) et (BC) sont perpendiculaires.

Activité 4

1. Le cercle (C_2) de centre B car $t_{\overrightarrow{AB}}(A) = B$ et de même rayon.
Le cercle (C_3) de centre D car $t_{\overrightarrow{AD}}(A) = D$ et de même rayon.
2. Soit (C') le cercle de centre C et de rayon AI.
la translation qui transforme (C) en (C') elle transforme A en C
donc \overrightarrow{AC} est le vecteur de cette translation.



III. Exercices (je maîtrise mes connaissances)

Exercice 1

On donne un parallélogramme ABCD .

1. Construire les points I, K et H vérifiant : $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{CI}$; $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{KI}$ et $\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{CB}$
2. Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CK}$. En déduire que C est milieu de [DK].
3. Soit J le milieu de [DC]. Montrer que $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{HK}$ et que C est le centre de gravité du triangle AHK.

Exercice 2

1. Soit un triangle ABC tel que AB=7cm, AC=6cm et BC=5cm et soit I le point du segment [AB] tel que AI=4cm.
Construire le point J image de I par la translation de vecteur \overrightarrow{BC} . Justifier la construction.
2. La droite (AJ) coupe la droite (BC) en K. Calculer la longueur BK

Exercice 3

Soit un parallélogramme ABCD.

1. Où se trouvent les points P et Q tels que: $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{CB}$
2. Soit t la translation de vecteur \overrightarrow{AD} .
3. Construire l'image E du point C par la translation t .
4. Quel est le transformé, par la translation t , du triangle ABC?
5. Comparer \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{DE}

Exercice 4

1. Placer trois points non alignés A, D et C et construire le point B tel que $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$
2. La droite parallèle à (AC) passant par B coupe (AD) en E et (DC) en F.
3. Démontrer que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EB}$ et que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BF}$
4. En déduire que B est le milieu de [EF].
5. On note O le point d'intersection des diagonales de ABCD et O' son symétrique par rapport à B. Démontrer que $\overrightarrow{EO'} = \overrightarrow{OF}$

Exercice 5

1. Soit un carré ABCD.
Construire le point E image du point A par la symétrie de centre B, puis le point $F = t_{\overline{AC}}(C)$
2. Démontrer alors que les droites (BC) et (EF) sont parallèles.
3. Si $G = t_{\overline{AC}}(B)$, montrer que E, G et F sont alignés?
4. Montrer que G est le milieu de [EF].

Exercice 6

1. Soit un triangle quelconque ABC.
Construire le point D tel que $\overline{BA} = \overline{AD}$, puis le point E tel que $\overline{AB} = \overline{CE}$. Quelle est la nature des quadrilatères ADCE et ACEB?
2. La droite (DE) coupe la droite (AC) en F. Montrer que F est le milieu de [AC].
3. La droite (AE) coupe la droite (BC) en G. Montrer que G est le milieu de [BC].
4. En déduire que (GF) est parallèle à (BD) et évaluer $\frac{GF}{BD}$.

Exercice 7

On donne un triangle ABC de centre de gravité G et M un point du plan distinct de A, B, C et G

1. a) Construire les images G' , B' et C' de G, B et C par $t_{\overline{AM}}$
b) En déduire que : $\overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{GG'}$
2. a) Soit I le milieu de [BC]. Démontrer que le point $I' = t_{\overline{AM}}(I)$ est le milieu de $[B'C']$
b) Soit K le milieu de [AB]. Démontrer que le point $K' = t_{\overline{AM}}(K)$ est le milieu de $[MB']$
3. Montrer que G' est le centre de gravité du triangle $MB'C'$

Exercice 8

On donne un triangle ABC d'orthocentre H

1. Construire $B' = t_{\overline{AH}}(B)$ et $C' = t_{\overline{AH}}(C)$
2. a) Montrer que $t_{\overline{AB}}(H) = B'$
b) Montrer que $BB'C'C$ est un rectangle
3. On pose $H' = S_H(A)$
Montrer que H' est l'orthocentre du triangle $HB'C'$.

Exercice 9

$\zeta_{(o,r)}$ et $\zeta'_{(o',r)}$ sont deux cercles sécants en A et B et de même rayon r .

1. Montrer que $\zeta'_{(o',r)} = t_{\overrightarrow{OO'}}(\zeta_{(o,r)})$
2. a. Construire le point $B' = t_{\overrightarrow{OO'}}(B)$ et $A' = t_{\overrightarrow{OO'}}(A)$
b. Montrer que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ et que $(AB) \parallel (A'B')$
c. Montrer que $(AA') \perp (AB)$.

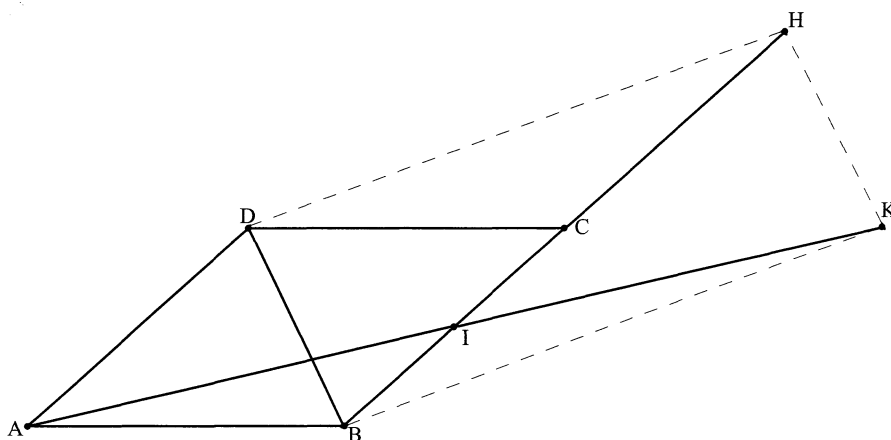
Exercice 10

Soit ABCD un parallélogramme de centre O. La droite D parallèle à (AC) menée par B coupe (AD) en E et (CD) en F.

1. Montrer que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EB}$ et que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BF}$. En déduire que $B = E * F$
2. Soit $O' = S_B(O)$. Montrer que $\overrightarrow{EO'} = \overrightarrow{OF}$
3. Soit I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [OA]
 - a. Construire le point H tel que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{IA}$
 - b. Montrer que J est le milieu de [IH]
 - c. Soit $K = S_O(B)$. Montrer que OBIH est un parallélogramme
 - d. Montrer que OIHK est un parallélogramme
 - e. Montrer que E est le milieu de [AK].

IV. Corrigés des exercices (je maîtrise mes connaissances)

Exercice 1

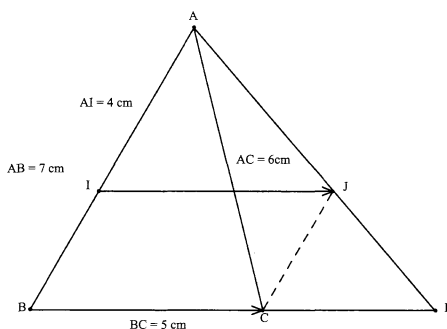


- 1) • $\overline{IB} = \overline{CI}$ signifie I est le milieu de [BC]
 • $\overline{IA} = \overline{KI}$ signifie I est le milieu de [KA]
 • $\overline{HC} = \overline{CB}$ signifie C est le milieu de [HB]
- 2) On a : I est le milieu de [BC] et I est le milieu de [AK]
 KC est un parallélogramme signifie $\overline{AB} = \overline{CK}$
 On a : $\begin{cases} \overline{AB} = \overline{CK} \\ \overline{AB} = \overline{DC} \end{cases} \Rightarrow \overline{DC} = \overline{CK}$ signifie C est le milieu de [DK].
- 3) On a : C est le milieu de [BH] et C est le milieu de [DK] donc DBKH est un parallélogramme signifie $\overline{DB} = \overline{HK}$. On a :
 $\overline{DA} = \overline{CB}$ et $\overline{HC} = \overline{CB}$ donc $\overline{DA} = \overline{HC}$ donc DACH est un parallélogramme et J le milieu de [DC] d'où J est le milieu de [AH].
 Dans le triangle AKH on a :
 I est le milieu de [KA] donc (HI) est la médiane issue de H.
 J = A * H donc (KJ) est la médiane issue de K et $(KJ) \cap (HI) = \{C\}$ donc C est le centre de gravité de AKH

Exercice 2

1. Comme l'image de I par la translation de vecteur \overline{BC} est J alors $\overline{IJ} = \overline{BC}$ alors IJCB est un parallélogramme. Pour construire le point J, il suffit de construire ce parallélogramme.

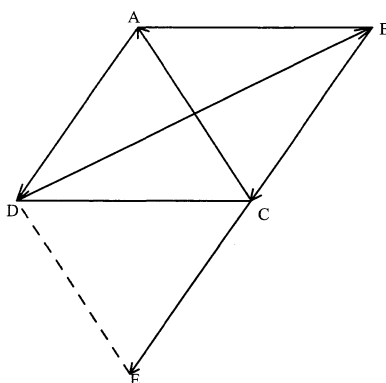
2. Comme I JCB est un parallélogramme alors $IJ = BC = 5\text{cm}$ et $(IJ) \parallel (BC)$ donc $(IJ) \parallel (BK)$. Dans le triangle ABK, la droite (IJ) coupe les côtés (AB) et (AK), parallèlement à (BK). D'après la propriété de Thalès: $\frac{AI}{AB} = \frac{IJ}{BK}$ d'où les produits en croix : $AI \times BK = AB \times IJ$ et $BK = \frac{AB \times IJ}{AI}$.



En remplaçant par leur valeur : $BK = \frac{7 \times 5}{4} = 8,75\text{cm}$

Exercice 3

1. Soit un parallélogramme ABCD.
- $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{DB}$ donc $P = B$.
 - $\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{CB}$ (1)
- or ABCD est un parallélogramme équivaut à $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$ (2)
De (1) et (2) on a : $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DQ} \Rightarrow A = Q$. Le point Q se trouve donc en A.



2. Soit $t = t_{\overrightarrow{AD}}$ la translation de vecteur \overrightarrow{AD} .
- a) Comme E est l'image de C par $t_{\overrightarrow{AD}}$ équivaut à $t_{\overrightarrow{AD}}(C) = E$ équivaut à $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CE}$
Comme $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CE}$ alors CEDA (ou ADEC) est un parallélogramme.
- b) Comme la translation conserve les distances et les angles, pour traduire le triangle ABC, il suffit de traduire chacun de ses sommets:
- $t_{\overrightarrow{AD}}(A) = M$ équivaut à $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM}$ équivaut à $D = M$.
L'image de A est **D**
 - comme ABCD est un parallélogramme alors $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ équivaut à $t_{\overrightarrow{AD}}(B) = C$. L'image de B est **C**
 - D'après a) on a : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CE}$ signifie $t_{\overrightarrow{AD}}(C) = E$. L'image de C est **E**
Le traduit de ABC est donc le triangle DCE.
- c) Comparer \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{DE}
Comme CEDA (ou ACED) est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DE}$.

Exercice 4

1. $\overline{CB} = \overline{DA}$ signifie CBAD est un parallélogramme.

Placer trois points non alignés A, D et C et construire le point B tel que CBAD est un parallélogramme

2. a) Comme ADCB est un parallélogramme alors $(AD) \parallel (CB)$ et $(AB) \parallel (DC)$. Donc $(AE) \parallel (BC)$ et $(CF) \parallel (AB)$.

Comme $(EF) \parallel (AC)$ alors

$(EB) \parallel (AC)$ et $(BF) \parallel (AC)$.

Comme les quadrilatères ACBE et ACFB ont leurs côtés opposés parallèles deux à deux alors ACBE et ACFB sont des parallélogrammes.

Comme ACBE est un parallélogramme alors $\overline{AC} = \overline{EB}$

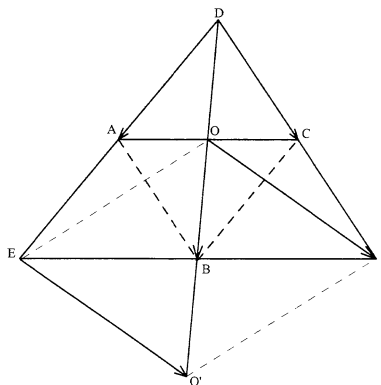
ACFB est un parallélogramme alors $\overline{AC} = \overline{BF}$

- b) Comme $\overline{AC} = \overline{EB}$ et $\overline{AC} = \overline{BF}$ alors $\overline{EB} = \overline{BF}$

alors B est le milieu de [EF].

3. Comme O' est le symétrique de O par rapport à B alors B est le milieu de [OO']. Comme les diagonales [OO'] et [EF] de EO'FO se coupent en leur milieu B alors EO'FO est un parallélogramme.

Comme EO'FO est un parallélogramme alors $\overline{EO'} = \overline{OF}$



Exercice 5

Soit un carré ABCD.

1. Pour E: prolonger (AB) vers B et avec le compas pointé en B reporter la distance AB sur ce prolongement.

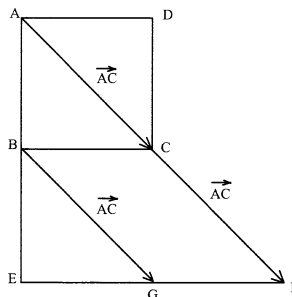
Pour F: prolonger (AC) vers C et avec le compas pointé en C reporter la distance AC sur ce prolongement.

2. Démontrer alors que les droites (BC) et (EF) sont parallèles.

- Comme E est le symétrique de A par rapport à B alors B milieu de [AE].

- $t_{\overline{AC}}(C) = F$ signifie $\overline{AC} = \overline{CF}$; $\overline{AC} = \overline{CF}$ signifie C milieu de [AF].

Dans le triangle AEF, comme (BC) passe par les milieux des côtés [AE] et [AF] alors (BC) est parallèle au troisième côté (EF).



3. $t_{\overline{AC}}(B) = G$ signifie $\overline{AC} = \overline{BG}$ (1)

On a : $t_{\overline{AC}}(C) = F$ signifie $\overline{AC} = \overline{CF}$ (2)

De (1) et (2) on a : $\overline{BG} = \overline{CF}$ alors BGFC est un parallélogramme.

Comme BGFC est un parallélogramme alors (GF) parallèle à (BC). Comme par le point G passent deux droites (GF) et (EF) parallèles à (BC) alors ces deux droites sont confondues et E, G et F sont alignés (ou encore: G sur (EF))

4. Montrer que G est le milieu de [EF].

Dans le triangle AEF, comme la droite (BG) passe par le milieu B du côté [AE] et est parallèle au côté [AF] alors la droite (BG) coupe le troisième côté en son milieu. Comme le point G appartient à la droite (BG) et au côté [EF] alors G est le milieu de [EF].

Exercice 6

1. Soit un triangle quelconque ABC.

Pour D: Comme $\overline{BA} = \overline{AD}$ alors A est le milieu de [BD]. Il faut donc construire D tel qu'il soit symétrique de B par rapport à A.

Pour E: comme $\overline{AB} = \overline{CE}$ alors CEBA est un parallélogramme construit sur les côtés [AB] et [AC].

2. ACEB est le parallélogramme CEBA. Comme ACEB est un parallélogramme alors $\overline{BA} = \overline{EC}$.

Comme $\overline{BA} = \overline{AD}$ et $\overline{BA} = \overline{EC}$ alors $\overline{AD} = \overline{EC}$.
et par suite ADCE est un parallélogramme.

3. Comme ADCE est un parallélogramme alors ses diagonales [DE] et [AC] se coupent en leur milieu F. Donc F milieu de [AC].

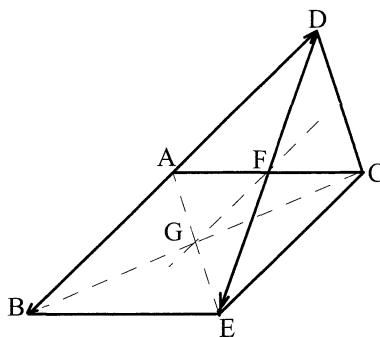
4. Comme ACEB est un parallélogramme alors ses diagonales [AE] et [BC] se coupent en leur milieu G donc G est le milieu de [BC].

5. Dans le triangle ABC, comme la droite (GF) passe par les milieux G et F des côtés [BC] et [AC] alors (GF) est parallèle au troisième côté (AB) (ou (BD)).

Comme [GF] joint les milieux des côtés [BC] et [AC] alors $GF = \frac{1}{2} AB$. Comme

A est le milieu de [BD] par construction alors $AB = \frac{1}{2} BD$.

Comme $GF = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} BD$ signifie $GF = \frac{1}{4} BD$ signifie $\frac{GF}{BD} = \frac{1}{4}$



Exercice 7

1. a) • $t_{\overrightarrow{AM}}(B) = B'$ signifie $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AM}$ (1); d'où $BB'MA$ est un parallélogramme.

• $t_{\overrightarrow{AM}}(C) = C'$ signifie $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AM}$ (2); d'où $CC'MA$ est un parallélogramme.

• $t_{\overrightarrow{AM}}(G) = G'$ signifie $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AM}$ (3); d'où $GG'MA$ est un parallélogramme.

b) De (1), (2) et (3) on a : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{GG'}$

2. a) Soit I le milieu de $[BC]$ et $t_{\overrightarrow{AM}}(I) = I'$ signifie $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{I'I'}$ or $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BB'}$ d'où

$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{I'I'}$ signifie $BB'I'I$ est un parallélogramme

équivalent à $\overrightarrow{B'I'} = \overrightarrow{BI}$ (1').

$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{I'I'}$ signifie $CC'I'I$ est un parallélogramme, signifie $\overrightarrow{I'C} = \overrightarrow{I'C'}$ (2').

On a : I est le milieu de $[BC]$ signifie $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$ (3')

de (1'), (2') et (3') on a : $\overrightarrow{B'I'} = \overrightarrow{I'C'}$ signifie I' est le milieu de $[B'C']$

Retenons : une translation conserve les milieux.

b) Soit K le milieu de $[AB]$ et $t_{\overrightarrow{AM}}(K) = K'$ signifie $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KK'}$

$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{KK'}$ signifie $BB'K'K$ est un parallélogramme signifie

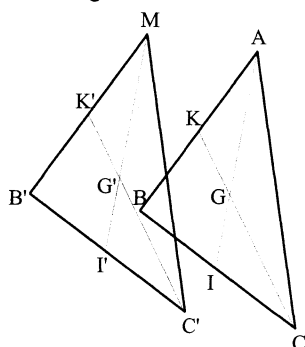
$\overrightarrow{B'K'} = \overrightarrow{BK}$ (1''). $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{KK'}$ signifie $AMK'K$ est un parallélogramme

signifie $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{K'M}$ (2''). On a : K le milieu de $[AB]$ signifie $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{KA}$ (3'')

de (1''), (2'') et (3'') on a : $\overrightarrow{B'K'} = \overrightarrow{K'M}$ signifie K' est le milieu de $[B'M]$

3. On a : • $t_{\overrightarrow{AM}}((AI)) = (MI')$ et comme $G \in (AI)$ alors son image G' par $t_{\overrightarrow{AM}}$ appartient à la droite (MI') . (a)

• $t_{\overrightarrow{AM}}((CK)) = (C'K')$ et comme $G \in (CK)$ alors son image G' par $t_{\overrightarrow{AM}}$ appartient à la droite $(C'K')$. (b). De (a) et (b) on a : $G' \in (C'K') \cap (MI')$ d'où G' est le centre de gravité du triangle $MB'C'$



Exercice 8

1. $B' = t_{\overrightarrow{AH}}(B)$ signifie $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AH}$ donc $BB'HA$ est un parallélogramme

$C' = t_{\overrightarrow{AH}}(C)$ signifie $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AH}$ donc $CC'HA$ est un parallélogramme.

2. a) D'après 1) on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AH} \\ \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AH} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$$

donc $BB'C'C$ est un parallélogramme

On a : $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AH}$ donc $BB'HA$ est un parallélogramme

équivalent à $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HB'}$ équivalent à $t_{\overrightarrow{AB}}(H) = B'$.

$$b) \begin{cases} t_{\overrightarrow{AB}}(A) = B \\ t_{\overrightarrow{AB}}(H) = B' \end{cases} \Rightarrow t_{\overrightarrow{AB}}((AH)) = (BB') \text{ d'où } (AH) // (BB') \text{ or } (AH) \perp (BC) \text{ donc}$$

$(BB') \perp (BC)$. Conclusion : $BB'C'C$ est un parallélogramme et $(BB') \perp (BC)$ donc : $BB'C'C$ est un rectangle.

3. • $H' = S_H(A)$ signifie H est le milieu de $[AH']$ signifie $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{HH'}$ d'où

A, H et H' sont alignés, par suite $(AH) = (HH')$ ainsi $(HH') \perp (B'C')$

donc (HH') est la hauteur issue de H du triangle $HB'C'$ (1)

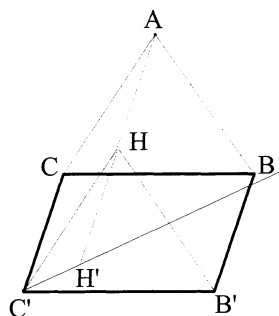
• On a : $BB'HA$ est un parallélogramme donc $(AB) // (HB')$

$$\begin{cases} t_{\overrightarrow{AH}}(C) = C' \\ t_{\overrightarrow{AH}}(H) = H' \end{cases} \text{ donc } \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{C'H'} \text{ donc } (CH) // (C'H') \text{ or } (CH) \perp (AB).$$

par suite $(C'H') \perp (AB)$ or $(AB) // (HB')$ donc $(C'H') \perp (HB')$

donc $(C'H')$ est la hauteur issue de C' du triangle $HB'C'$ (2)

De (1) et (2) on a : $(C'H') \cap (HH') = \{H'\}$ donc H' est l'orthocentre du triangle $HB'C'$.



Exercice 9

1. On a : $t_{\overrightarrow{OO'}}(O) = O'$ et $\zeta_{(O,r)}$ et $\zeta'_{(O',r)}$ ont même rayon

$$\text{alors } \zeta'_{(O',r)} = t_{\overrightarrow{OO'}}(\zeta_{(O,r)}).$$

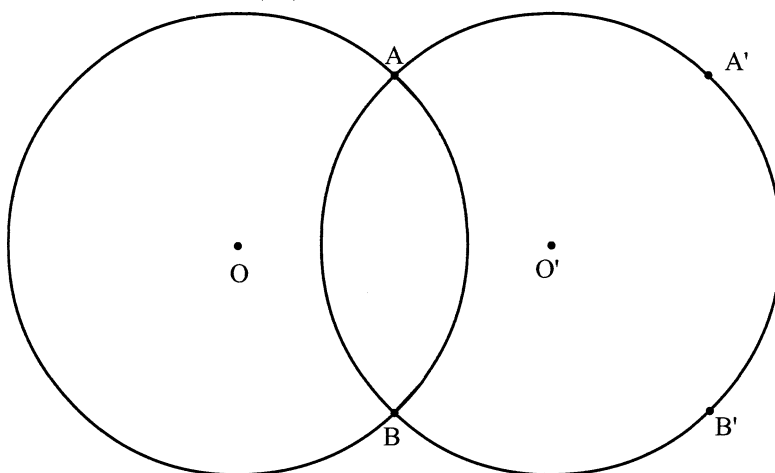
2. a) Construire les points B' et A'

• $B' = t_{\overrightarrow{OO'}}(B)$ signifie $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{OO'}$ et comme $B \in \zeta_{(O,r)}$

alors son image $B' \in \zeta'_{(O',r)}$

• $A' = t_{\overrightarrow{OO'}}(A)$ signifie $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OO'}$ et comme $A \in \zeta_{(O,r)}$

alors son image $A' \in \zeta'_{(O',r)}$



b) On a : $\begin{cases} \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{OO'} \\ \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OO'} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'}$

et par suite $BB'A'A$ est un parallélogramme d'où $(AB) \parallel (A'B')$.

c) • On a : $\begin{cases} r = OA = O'A' \\ r = OB = O'B' \end{cases}$ donc (AB) et la médiatrice de $[OO']$

d'où $\boxed{(AB) \perp (OO')}$ (1)

• $t_{\overrightarrow{OO'}}(A) = A'$ signifie $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AA'}$ donc $\boxed{(OO') \parallel (AA')}$ (2)

De (1) et (2) on a : $(AA') \perp (AB)$

Devoir de contrôle N° 2-1

Exercice 1

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes

a) $\frac{x-1}{2} + \frac{2x-3}{3} = x-2$

b) $(2x-3)^2 - (3x+1)^2 = 0$

c) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 3$

Exercice 2

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

a) $2(3x-1) + 3(4x-2) \leq -5(3x-5)$

b) $(3x+1)(4x-5) > (2x-1)(6x+2)$

Exercice 3

Soit x un angle aigu

1. Démontrer que $(1 + \tan^2 x)(1 - \sin^2 x) = 1$

2. Démontrer que $(\sin x + \cos x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$

3. Sachant que $\sin x = \frac{3}{5}$. Calculer $\cos x$ et $\tan x$

Exercice 4

On donne un triangle ABC isocèle de sommet principale A avec $AB=AC=6\text{cm}$ et $\widehat{BAC} = 30^\circ$

Et on pose H le projeté orthogonal de B sur [AC]

1. Faites un dessin

2. Evaluer en degrés les angles \widehat{ABC} ; \widehat{ABH} et \widehat{HBC}

3. Sachant que $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ calculer BH ; AH ; et HC

4. Dédurre $\tan 15^\circ$

Devoir de contrôle N° 2- 2

Exercice 1

1. Résoudre dans IR les équations suivantes :

- $2(3x + 2) = 4x - 5$.
- $(2x + 1)^2 + (2x + 1)(x - 3) = 0$
- $\sqrt{5x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 2} = 0$
- $\sqrt{4x^2 - 20x + 25} = 3$

2. Soit la fonction linéaire f telle que -2 est l'antécédent de 3.

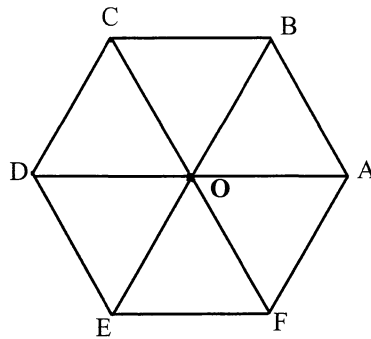
- b) Déterminer le coefficient a de f .
- c) Dire si le point $A(-1, 2)$ appartient à la courbe représentatif de f .
- d) Déterminer le nombre réel m pour que le point $I\left(-1 + 2m, \frac{1}{2}\right)$ appartienne à la courbe de f .
- e) Construire la courbe représentatives de f .

Exercice 2

La figure ci-contre est un hexagone régulier de centre O.

Exprimer la somme des vecteurs suivants en utilisant que des noms de points présents sur la figure :

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$;
 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}$; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB}$;
 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}$



Exercice 3

Soit un triangle ABC et I milieu du segment [AC] .

1. Montrer que pour tout point M du plan on a : $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC})$
2. Soit G le centre de gravité du triangle ABC . Montrer que pour tout N du plan on a : $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = 3\overrightarrow{NG}$.
3. Soit K le point du plan qui vérifie la relation : $2\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$. Montrer que les points I, B et K sont alignés.

Corrigé du devoir de contrôle N° 2 - 1

Exercice 1

a) $\frac{x-1}{2} + \frac{2x-3}{3} = x-2$ équivaut à $\frac{3(x-1)+2(2x-3)}{6} = x-2$

équivaut à $3x-3+4x-6=6(x-2)$

équivaut à $7x-6x=-12+9$ équivaut à $x=-3$

b) $(2x-3)^2 - (3x+1)^2 = 0$ équivaut à $(2x-3-3x-1)(2x-3+3x+1) = 0$

équivaut à $(-x-4)(5x-2) = 0$ équivaut à $-x-4=0$ ou $5x-2=0$

signifie $x=-4$ ou $x=\frac{2}{5}$ donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{-4, \frac{2}{5}\right\}$

c) $\sqrt{4x^2-4x+1}=3$

équivaut à $\sqrt{(2x-1)^2}=3 \Leftrightarrow |2x-1|=3$

équivaut à $2x-1=3$ ou $2x-1=-3$

équivaut à $2x=4$ équivaut à $x=2$ ou $2x=-2$ équivaut à $x=-1$

$S_{\mathbb{R}} = \{-1, 2\}$

Exercice 2

a) $2(3x-1)+3(4x-2) \leq -5(3x-5)$

équivaut à $6x-2+12x-6 \leq -15x+25$

équivaut à $18x-8 \leq -15x+25$ équivaut à $33x \leq 33$

équivaut à $x \leq 1$ donc $S_{\mathbb{R}} =]-\infty, 1]$

b) $(3x+1)(4x-5) > (2x-1)(6x+2)$

équivaut à $(3x+1)(4x-5) - 2(2x-1)(3x+1) > 0$

équivaut à $(3x+1)[4x-5-2(2x-1)] > 0$

équivaut à $(3x+1)(4x-5-4x+2) > 0$

équivaut à $-3(3x+1) > 0$ équivaut à $3x+1 < 0$

$x < -\frac{1}{3}$ donc $S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[$

Exercise 3

$$1. (1 + \tan^2 x)(1 - \sin^2 x) = \left(1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)(1 - \sin^2 x)$$

$$= \left(\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\right)(\cos^2 x) = \frac{1}{\cos^2 x} \cos^2 x = 1$$

$$2. (\sin x + \cos x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 =$$

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x$$

$$= 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2 \times 1 = 2$$

$$3. \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

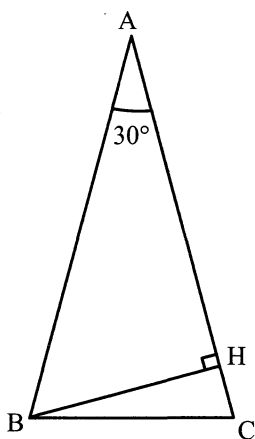
$$\bullet \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} \quad (\cos x > 0)$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\bullet \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

Exercise 4

1.



2.

$$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = 180.$$

$$30 + 2\widehat{ABC} = 180 \text{ équivaut à } 2\widehat{ABC} = 150 \text{ équivaut à } \widehat{ABC} = 75$$

• Calcul de \widehat{ABH} : considérons le triangle BHA. On a :

$$\widehat{BAH} + \widehat{ABH} + \widehat{AHB} = 180 \text{ équivaut } 30 + 90 + \widehat{ABH} = 180 \text{ équivaut à }$$

$$\widehat{ABH} = 180 - 120 = 60.$$

• Calcul de \widehat{HBC} : on a : $\widehat{ABH} + \widehat{HBC} = \widehat{ABC}$ équivaut à

$$60 + \widehat{HBC} = 75 \text{ équivaut à } \widehat{HBC} = 15.$$

3. Dans le triangle ABH rectangle en H ,

$$\sin 30^\circ = \frac{BH}{AB} \text{ équivaut à } \frac{1}{2} = \frac{BH}{6} \text{ équivaut à } BH = 3$$

• AHS est un triangle rectangle en H donc $AH^2 + HB^2 = AB^2$

$$\text{équivaut à } AH^2 + 9 = 36 \text{ équivaut à } AH^2 = 36 - 9 = 27 \text{ donc}$$

$$AH = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

• Calcul de HC : $HC = AC - AH = 6 - 3\sqrt{3}$

$$4. \tan 15^\circ = \tan \widehat{HBC} = \frac{HC}{HB} = \frac{6 - 3\sqrt{3}}{3} = 2 - \sqrt{3}$$

Corrigé du devoir de contrôle N° 2- 2

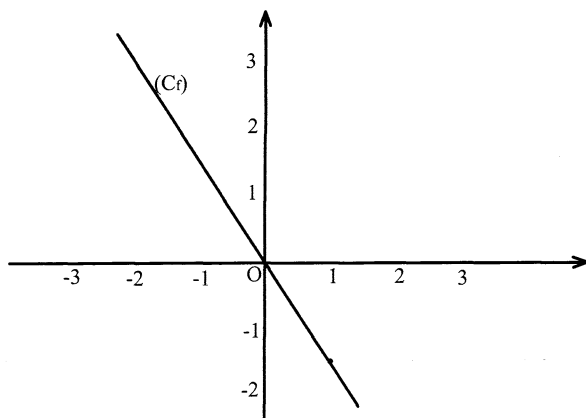
Exercice 1

1.

- L'équation $2(3x + 2) = 4x - 5$ équivaut à $6x + 4 = 4x - 5$ donc $2x = -9$ équivaut à $x = -\frac{9}{2}$ donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{9}{2}\right\}$.
- L'équation $(2x + 1)^2 + (2x + 1)(x - 3) = 0$ équivalente à $(2x + 1)(2x + 1 + x - 3) = 0$ équivalente à $x = -\frac{1}{2}$ ou $x = \frac{2}{3}$ donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}$.
- L'équation $\sqrt{5x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 2} = 0$. On sait que $5x^2 + 1 > 0$ et $x^2 + 2 > 0$ l'équation équivalente à $\sqrt{5x^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 2}$ donne $5x^2 + 1 = x^2 + 2$ donc $x^2 - 1 = 0$ équivaut à $(x - 1)(x + 1) = 0$ et par suite $x = -1$ ou $x = 1$ donc $S_{\mathbb{R}} = \{-1, 1\}$.
- L'équation $\sqrt{4x^2 - 20x + 25} = 3$ équivalente à $\sqrt{(2x - 5)^2} = 3$ équivaut à $|2x - 5| = 3$ donc $2x - 5 = 3$ où $2x - 5 = -3$ et par suite $x = 4$ ou $x = 1$ donc $S_{\mathbb{R}} = \{1, 4\}$.

2. Soit la fonction linéaire f tel que -2 est l'antécédent de 3

- a) L'antécédent de 3 est -2 équivaut à $f(-2) = 3$ donc si on désigne par $f(x) = ax$ alors $-2a = 3$ d'où $a = -\frac{3}{2}$ et par suite $f(x) = -\frac{3}{2}x$.
- b) On a : $f(-1) = \frac{3}{2} \neq 2$ donc le point $A(-1, 2) \notin C_f$ courbe représentative de f .
- c) Le point $I\left(-1 + 2m, \frac{1}{2}\right) \in C_f$ équivaut à $-\frac{3}{2}(-1 + 2m) = \frac{1}{2}$ d'où $\frac{3}{2} - 3m = \frac{1}{2}$ équivaut à $-3m = -1$, donc $m = \frac{1}{3}$.
- d) Construire la courbe représentative de f .



Exercice 2

La figure ci-contre est un hexagone régulier de centre O.

Exprimer la somme des vecteurs suivants en utilisant que des noms de points

présents sur la figure : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$;

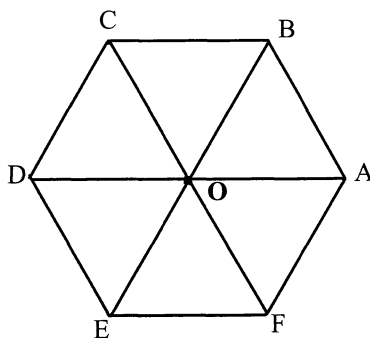
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$;

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{EA}$;

$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EB}$;

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EB}$;

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$



Exercice 3

1. On a pour tout point M du plan

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC})$$

$$= \frac{1}{2}(2\overrightarrow{MI} + \vec{0}) = \overrightarrow{MI}.$$

2. D'après la relation de Chasles on a :

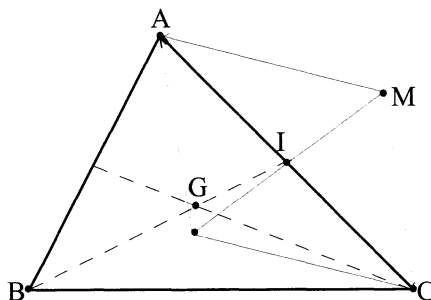
$$\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = 3\overrightarrow{NG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$$

et puisque $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, on aura

$$\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = 3\overrightarrow{NG}.$$

3. la relation : $2\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$ est équivalente à $4\overrightarrow{KI} - \overrightarrow{KB} = \vec{0}$ d'où les

vecteurs \overrightarrow{KI} et \overrightarrow{KB} sont colinéaires donc les points K, I et B sont alignés.



Somme de deux vecteurs

Vecteurs colinéaires

I. Activités pour bien assimiler mon cours

Activité 1

On donne un triangle OAB

1. a) Construire les points C et E tels que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$
 b) Montrer que B est le milieu du segment [OE]
2. Construire le points D tel que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

Somme de deux vecteurs.

Soient A, B et C trois points.

- Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ équivaut à $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$
- la règle du parallélogramme :
- Soient A, B, C et D quatre points non alignés. On a
 $ABDC$ est un parallélogramme équivaut à $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

Milieu d' un segment

A, B et I sont trois points distincts on a :

I est le milieu de [AB] équivaut à $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$

I est le milieu de [AB] équivaut à $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$

Activité 2

Soit OACB un carré

1. Construire les points D et E tels que : $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OE} = -\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.
2. Montrer que \overrightarrow{OC} et \overrightarrow{DE} sont colinéaires.

Soient A et B deux points distincts du plan.

• Soient a un réel et M le point d'abscisse a dans le repère (A, \overrightarrow{AB}). On a :
 ($\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB}$) équivaut à (les points A, B et M sont alignés et le point M est d'abscisse a dans le repère (A, \overrightarrow{AB})).

• Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan et a un réel non nul.

Si $\overrightarrow{CD} = a\overrightarrow{AB}$ alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles et $CD = |a| AB$.

Si $\overrightarrow{CD} = a\overrightarrow{AB}$ et $a > 0$ on dit que \overrightarrow{CD} et \overrightarrow{AB} sont colinéaires et de même sens.

Si $\overrightarrow{CD} = a\overrightarrow{AB}$ et $a < 0$ on dit que \overrightarrow{CD} et \overrightarrow{AB} sont colinéaires et de sens contraires.

Soient A, B, C et D quatre points du plan tel que $A \neq B$ et $C \neq D$

Si les droites (AB) et (CD) sont parallèles alors les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires.

II. Corrigés des activités (bien assimiler mon cours)

Activité 1

1. a) • Construction du point C

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$$

$$\text{équivalent à } \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$$

$$\text{équivalent à } \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AC}$$

équivalent à OBCA est un parallélogramme

• Construction du point E

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$$

$$\text{équivalent à } \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} \text{ équivalent à } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} \text{ équivalent à } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$$

équivalent à ABEC est un parallélogramme

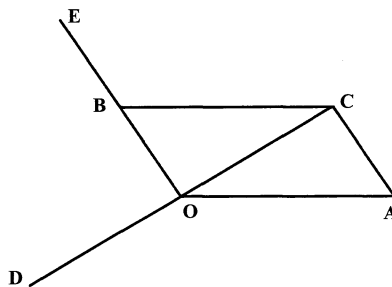
b) OBCA est un parallélogramme équivalent à $\boxed{\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}}$ (1)

ABEC est un parallélogramme équivalent à $\boxed{\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}}$ (2)

De (1) et (2) on a: $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BE}$ équivalent à B est le milieu de [OE]

2. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ équivalent à $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ équivalent à $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

équivalent à O est le milieu de [CD], donc $D = S_O(C)$



Activité 2

1. Construire les points D et E

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OE}$$

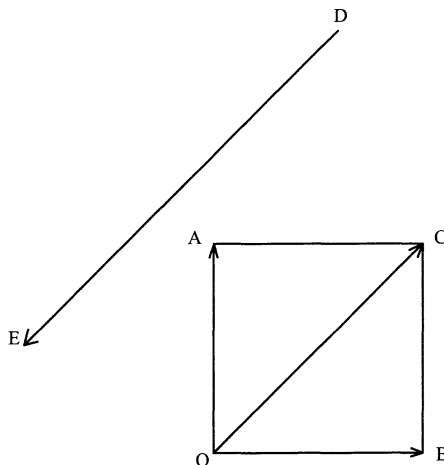
$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{DE} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$$

$$= -\frac{3}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

$$\overrightarrow{DE} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{OC}$$

Donc \overrightarrow{DE} et \overrightarrow{OC} sont colinéaires



III. Exercices (je maîtrise mes connaissances)

Exercice 1

Soit ABC un triangle rectangle en B.

1. Construire le point D tel que $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.
2. Soit ABCD un parallélogramme de centre O et F un point à l'extérieur du parallélogramme. Simplifier les sommes suivantes :
 - a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FA}$; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$
 - b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$
 $\bullet \vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$
3. a) Construire le point F' tel que $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CF'}$.
b) Que représente A pour le segment [DF'] ?

Exercice 2

1. Placer trois points A, D et C non alignés et construire le point B tel que :
 $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$
2. La parallèle à (AC) passant par B coupe (AD) en E et (DC) en F.
Démontrer que : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BF}$. En déduire que B est le milieu de [EF].
3. On note O le point d'intersection des diagonales du parallélogramme ABCD et O' son symétrique par rapport à B. Démontrer que : $\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OF}$

Exercice 3

ABC est triangle et H le milieu du segment [BC]

1. a) Construire le point E tel que: $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$
b) Construire le point G tel que: $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}$. En déduire que
 $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{HE}$
2. Montrer que: $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{HE}$
3. Déterminer le point M tel que: $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{HM} = \vec{0}$
4. Montrer que: $\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{GE} = \vec{0}$

Exercice 4

ABC est un triangle.

1. Placer les points D, E et F tels que : $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2} \overrightarrow{AC}$;
 $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{CB}$ et F est le milieu de [AC].

2. Exprimer, en justifiant, le vecteur \overrightarrow{AB} en fonction de \overrightarrow{FE} .
3. a) Exprimer le vecteur \overrightarrow{AE} en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
b) En déduire un réel k tel que $\overrightarrow{AD} = k \overrightarrow{AE}$.
c) Que peut-on alors conclure ?
4. a) Placer le point M tel que : $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$
b) Placer le point G symétrique de F par rapport à C.
Montrer que $\overrightarrow{GA} = \frac{3}{2} \overrightarrow{CA}$ puis que $\overrightarrow{GD} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AB}$.
c) En déduire la nature du quadrilatère AMDG.

Exercice 5

ABC est un triangle et O le centre de son cercle circonscrit. A' est le milieu du segment [BC], B' celui de [CA] et C' celui de [AB].

- A) On considère le point H défini par : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ [1]
1. Justifier que $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$ [2]
 2. Déduire de la relation [1] que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$
 3. Démontrer alors que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.
 4. De la même manière, démontrer que la droite (BH) est perpendiculaire à la droite (AC).
 5. Que représente le point H pour le triangle ABC ?
- B) G désigne le centre de gravité du triangle ABC.
1. En partant de l'égalité $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$, démontrer que : $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA'}$.
 2. En déduire que $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$.
 3. En déduire l'alignement de O, G, H lorsque le triangle ABC n'est pas équilatéral.
 4. Que peut-on dire des points O, G et H dans le cas où ABC est un triangle équilatéral ?

Exercice 6

- I) Construire un triangle BCD rectangle en B tel que BD = 2 et BC = 6
1. Placer sur la figure le point A symétrique du point D par rapport au point B, puis le point E symétrique du point C par rapport au point B. Démontrer que ACDE est un losange.
 2. a. Construire le point F tel que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DC}$.
b. Démontrez que $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AF}$: Que représente le point A pour le segment [EF] ?
 3. Soit I le point d'intersection des droites (CF) et (DE)
Montrez que C est le milieu du segment [EF]
- II) B' et C' sont respectivement les milieux des côtés [AC] et [AB] d'un triangle ABC.
1. Construire le point M tel que : $\overrightarrow{B'M} = \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{B'C'}$

2. Construire le point N tel que : $\overrightarrow{B'N} = \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'C}$
3. Démontrez que N est le milieu de [CB]
4. Démontrez que : $\overrightarrow{CB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'N} + \overrightarrow{BN} = \vec{0}$

Exercice 7

A, B et C sont trois points non alignés et le point M défini par :

$$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

1. Exprimer \overrightarrow{AM} à l'aide de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
2. Soit I le milieu de [AC] et G le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que les vecteurs \overrightarrow{IM} et \overrightarrow{IB} sont colinéaires.
3. a. Montrer que \overrightarrow{MG} et \overrightarrow{GB} sont colinéaires
b. Montrer que I est le milieu de [GM].

Exercice 8

Soient A, B et C trois points non alignés et soit M un point du plan tel que :

$$5\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

1. Exprimer \overrightarrow{AM} à l'aide de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
2. Soit I le milieu de [BC] Montrer que les vecteurs \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{AI} sont colinéaires.
En déduire que les points A, I et M sont alignés.

Exercice 9

Soit ABCD un trapèze tel que $\overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{AB}$.

1. Placer les points I et J tels que : $3\overrightarrow{DI} = 2\overrightarrow{DA}$ et $3\overrightarrow{CJ} = 2\overrightarrow{CB}$.
2. a) Vérifier que $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ et $2\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$.
b) Montrer que $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{IJ}$ puis déduire que \overrightarrow{IJ} et \overrightarrow{AB} sont colinéaires.
3. a) Placer le point C' tel que $\overrightarrow{AC'} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$.
b) Déterminer les réels α et β tel que : $\overrightarrow{DJ'} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{DA}$
c) Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{DC'}$ à l'aide des vecteurs \overrightarrow{DA} et \overrightarrow{AB} . Déduire que les points D, J et C' sont alignés.

Exercice 10

ABCD est un quadrilatère.

1. Démontrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$
2. On appelle I' le milieu $[AC]$, J' celui de $[BD]$.
 - a) Démontrer que $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = 2 \overrightarrow{I'J'}$
 - b) En déduire que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2 \overrightarrow{I'J'}$
3. ABCD est un parallélogramme de centre O.

On définit le point E par $\overrightarrow{AE} = 3 \overrightarrow{AD}$, le point F est le symétrique de B par rapport à C et le point I par

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3} \overrightarrow{DC}$$

- a) Démontrer que les points C, D et I sont alignés.
- b) Démontrer que $\overrightarrow{BE} = 3 \overrightarrow{BI}$.
- c) Démontrer que les points F, O et I sont alignés.
- d) Démontrer que les droites (EF) et (OD) sont parallèles

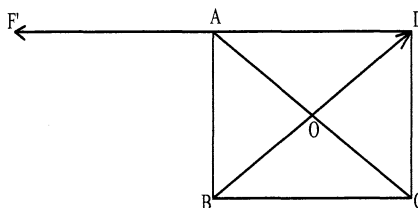
IV. Corrigés des exercices (je maîtrise mes connaissances)

Exercice1

1. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$ équivaut à
 $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$ équivaut à
 $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CB}$ signifie $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

signifie ABCD un parallélogramme

et puisque \widehat{ABC} est un angle droit
 alors ABCD est un rectangle



2. a) • $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Relation de Chasles)
 - $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FC}$
 - $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ (O est le milieu de $[AC]$).

- b) • $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \left(\underbrace{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}_{\vec{0}} \right) + \left(\underbrace{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}}_{\vec{0}} \right) = \vec{0}$
- $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$ équivaut à
- $$\vec{u} = \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \right) + \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} \right) + \left(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB} \right) + \left(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} \right)$$
- équivaut à $\vec{u} = 2 \overrightarrow{AO} + 2 \overrightarrow{OB} + 2 \overrightarrow{CO} + 2 \overrightarrow{OD}$
- équivaut à $\vec{u} = 2(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CO}) + 2(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = \vec{0}$
3. a) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CF'}$ équivaut à $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CF'} + \overrightarrow{BC}$
- équivaut à $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BF'}$ équivaut à CAF'B est un parallélogramme
- b) On a : CAF'B est un parallélogramme équivaut à $\boxed{\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{F'A}}$ (1)
- ABCD est un parallélogramme équivaut à $\boxed{\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}}$ (2)
- De (1) et (2) on a : $\overrightarrow{F'A} = \overrightarrow{AD}$ équivaut à A est le milieu de [F'D].

Exercice 2

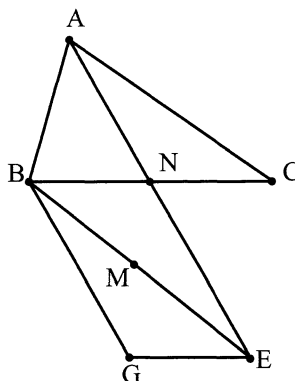
- $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$ signifie $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA}$ signifie $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA}$
signifie $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$. Cette dernière relation permet d'affirmer que CBAD est un parallélogramme : on a la construction du point B.
- Puisque CBAD est un parallélogramme, ses côtés opposés sont parallèles donc les droites (AD) et (BC) sont parallèles.
Or, le point E appartient à la droite (AD) donc les droites (AE) et (BC) sont parallèles. Par construction, les droites (EB) et (AC) sont aussi parallèles donc ACBE est un quadrilatère ayant ses côtés opposés parallèles : ACBE est un parallélogramme. On a alors : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EB}$ De même, on montre que ACFB est un parallélogramme ce qui donne : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BF}$. Ces deux égalités entraînent l'égalité suivante : $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{EB}$ donc $\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{EB} = \vec{0}$ signifie $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BE} = \vec{0}$ On en déduit que le point B est le milieu du segment [EF].
- Le point O' est le symétrique de O par rapport à B donc le point B est le milieu du segment [OO']. D'après 2) le point B est aussi le milieu du segment [EF]. Or les segments [OO'] et [EF] sont les diagonales du quadrilatère EOFO'. Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme.
Donc EOFO' est un parallélogramme. Par suite, on a : $\overrightarrow{EO'} = \overrightarrow{OF}$

Exercice 3

- $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$ équivaut à $CABE$ est un parallélogramme.
 - $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}$ équivaut à $HABG$ est un parallélogramme. On a : H le milieu du segment $[BC]$ d'où H le milieu du segment $[AE]$ donc $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{HE}$
- On a : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}$ équivaut à $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH}$ équivaut à $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH}$ équivaut à $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH}$ or $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{HE}$ d'où $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EH}$ équivaut à $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{HE} + \underbrace{\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EH}}_{\vec{0}}$ équivaut à $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{HE}$.

- $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{HM} = \vec{0}$
équivaut à $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{AM} = \vec{0}$
équivaut à $-\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{AM} = \vec{0}$
équivaut à $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AH}$ or $2\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AE}$
donc $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}$ équivaut à $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BE}$
équivaut à $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$.

- $\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GE}$
 $= (\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA}) - \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{GE}$
or $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BE}$ or $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$
donc $\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$



Exercice 4

-
- Dans le triangle ABC , E est le milieu de $[BC]$. F est le milieu de $[AC]$
Donc d'après le théorème des milieux, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{FE}$.
- $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$ d'après la relation de Chasles

$$= \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

b) $3\overrightarrow{AE} = 3 \times \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + 3 \times \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2} \overrightarrow{AC}$ d'où $\overrightarrow{AD} = 3 \overrightarrow{AE}$.

c) Les vecteurs \overrightarrow{AD} et \overrightarrow{AE} sont alors colinéaires et les points A, D et E sont alignés.

4. a) $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$ nous donne $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$
on a alors $-2\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ (ceci nous permet alors de placer le point M).

b) G est le symétrique de F par rapport à C, d'où C est le milieu de [FG]

et $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{FC}$. $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CA}$ d'où

$$\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} = \frac{3}{2} \overrightarrow{CA}. \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD} =$$

$$\frac{3}{2} \overrightarrow{CA} + \frac{3}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2} \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2} (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{3}{2} \overrightarrow{AB}.$$

- c) On a alors $\overrightarrow{GD} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AB}$ d'où $\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{AM}$ et le quadrilatère AMDG est un parallélogramme.

Exercice 5

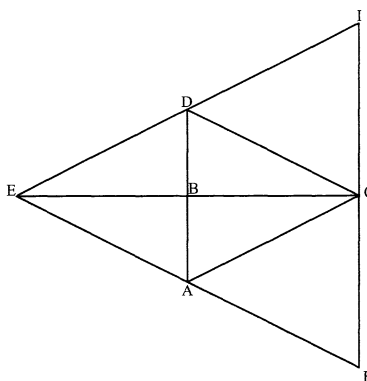
- H est défini par $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$
 $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C}$ de plus A' est le milieu de [BC], on a alors $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{0}$ et on obtient $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$.
- De l'égalité $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, on déduit $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA'}$
d'où $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$.
- D'après la question 2) \overrightarrow{AH} et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires, d'où (AH) et (OA') sont parallèles, de plus (OA') est la médiatrice de [BC], donc (OA') est perpendiculaire à (BC). En conclusion, (BC) et (AH) sont perpendiculaires.
De même $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{B'C}$ équivaut à
- $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{B'C} = 2\overrightarrow{OB'}$ car B' est le milieu de [AC]
et d'après [1], on obtient $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ équivaut à
 $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ équivaut à $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ équivaut à $\overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{OB'}$.
 \overrightarrow{BH} et $\overrightarrow{OB'}$ sont colinéaires, (BH) et (OB') sont alors parallèles
de plus (OB') est la médiatrice de [AC], (OB') et (AC) sont alors perpendiculaires et on en déduit alors que (BH) et (AC) sont perpendiculaires
- H est alors le point d'intersection de (BH) et (AH) qui sont deux hauteurs du triangle ABC. Donc H est l'orthocentre du triangle ABC.

B) G est le centre de gravité du triangle ABC.

- On a alors $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$ équivaut à $\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} = -2\overrightarrow{GO} - 2\overrightarrow{OA'}$
équivaut à $3\overrightarrow{GO} = -\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OA'}$ équivaut à $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA'}$.
- D'après la question **A - 2.**, on a $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$, ce qui donne :
 $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH}$ équivaut à $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$.
- Les vecteurs \overrightarrow{OG} et \overrightarrow{OH} sont alors colinéaires,
si les trois points O, G et H ne sont pas confondus, on conclut alors qu'ils sont alignés.
- Dans le cas d'un triangle équilatéral, les droites remarquables du triangle sont confondues, donc les trois points O, G et H sont confondus.

Exercice 6

- A symétrique du point D par rapport au point B donc B est le milieu de [AD]
E symétrique du point C par rapport au point B donc B est le milieu de [EC] Le quadrilatère ACDE a ses diagonales qui se coupent en leur milieu : c'est un parallélogramme. De plus DBC est un triangle rectangle en B donc (DA) et (EC) sont perpendiculaires.

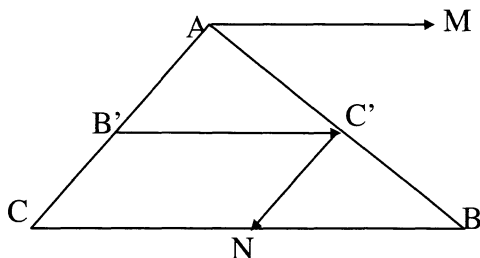


Un parallélogramme qui a ses diagonales perpendiculaires est un losange donc ACDE est un losange.

- a) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DC}$ donc AFCD est un parallélogramme
 - b) ACDE est un parallélogramme donc $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{DC}$ de plus $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AF}$ Lorsque $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AF}$ alors A est le milieu de [EF].
- ADCF est un parallélogramme donc (DA) et (CF) sont parallèles
Dans le triangle EIF, A est le milieu de [EF] et (AD) est parallèle à (CF) donc à (FI). Dans un triangle la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle au deuxième côté passe par le milieu du troisième côté donc D est le milieu de [EI]. D est le milieu de [EI] donc $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{DI}$
EDCA est un parallélogramme donc $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AC}$ Donc $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AC}$ et DICA est un parallélogramme donc $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{IC}$. Or DCFA est un parallélogramme donc $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CF}$ D'après les deux dernières égalités $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{CF}$ et C est le milieu de [IF]

II) B' et C' sont respectivement les milieux des côtés [AC] et [AB] d'un triangle ABC.

1. Construire le point M tel que : $\vec{B'M} = \vec{B'A} + \vec{B'C'}$
2. Construire le point N tel que : $\vec{B'N} = \vec{B'C'} + \vec{B'C}$
3. D'après l'égalité de la question 2) CB'C'N est un parallélogramme donc (C'N) est parallèle à (AC). Dans le triangle ABC, C' est le milieu de [AB] et (C'N) est parallèle à (AC). Dans un triangle la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle au deuxième côté passe par le milieu du troisième côté. Donc N est le milieu de [CB]



4. En appliquant la relation de Chasles
 $\vec{CB'} + \vec{B'C'} + \vec{C'N} + \vec{BN} = \vec{CC'} + \vec{C'N} + \vec{BN} = \vec{CN} + \vec{BN}$. Or N est le milieu de [CB] donc $\vec{CN} = \vec{NB}$ donc $\vec{CB'} + \vec{B'C'} + \vec{C'N} + \vec{BN} = \vec{CN} + \vec{BN} = \vec{NB} + \vec{BN} = \vec{NN} = \vec{0}$

Exercice 7

1. $2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} = \vec{0}$ signifie $2\vec{MA} - (\vec{MA} + \vec{AB}) + 2(\vec{MA} + \vec{AC}) = \vec{0}$
équivalent à $2\vec{MA} - \vec{MA} - \vec{AB} + 2\vec{MA} + 2\vec{AC} = \vec{0}$ équivalent à $3\vec{MA} - \vec{AB} + 2\vec{AC} = \vec{0}$
équivalent à $3\vec{MA} = -\vec{AB} + 2\vec{AC}$ équivalent à $\vec{AM} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$.
2. I est le milieu de [AC]
équivalent à $\vec{IA} + \vec{IC} = \vec{0}$ équivalent à $2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} = \vec{0}$ équivalent à
 $2\vec{MI} + 2\vec{IA} - \vec{MI} - \vec{IB} + 2\vec{MI} + 2\vec{IC} = \vec{0}$ équivalent à $3\vec{MI} - \vec{IB} + 2(\vec{IA} + \vec{IC}) = \vec{0}$
équivalent à $3\vec{MI} = -\vec{IB}$ équivalent à $\vec{IM} = -\frac{1}{3}\vec{IB}$ signifie \vec{IM} et \vec{IB} sont colinéaires.

$$b) 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{IJ} + 2\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC}$$

$$= \left(\underbrace{2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DI}}_{\vec{0}} \right) + 3\overrightarrow{IJ} + \left(\underbrace{2\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC}}_{\vec{0}} \right) = 3\overrightarrow{IJ} \quad \text{or} \quad \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{AB} \text{ donc}$$

$$2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} \text{ donc sont colinéaires.}$$

$$3. a) \overrightarrow{AC'} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB} \text{ placer } C'$$

$$b) \overrightarrow{DJ'} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{DA}. \text{ Déterminer les réels } \alpha \text{ et } \beta \text{ tel que } 5\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{FJ}$$

 équivaut à $5\overrightarrow{AB} = 3(\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DJ}) = 3\overrightarrow{ID} + 3\overrightarrow{DJ} = -2\overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{DJ}.$

$$5\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DA} = 3\overrightarrow{DJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{DJ} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DA}.$$

$$c) \text{ Exprimer } \overrightarrow{DC'} \text{ en fonction de } \overrightarrow{AB'} \text{ et } \overrightarrow{DA'}$$

$$\text{on a } \overrightarrow{AC'} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB} \text{ équivaut à } \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC'} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB} \text{ équivaut à } \overrightarrow{DC'} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}.$$

Déduction

$$\overrightarrow{DJ} = \frac{2}{3} \left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} \right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC'}. \text{ Donc } D, J \text{ et } C' \text{ sont alignés.}$$

Exercice 10

$$1. \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD}$$

$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$$

$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \text{ d'après la relation de Chasles}$$

$$2. I' \text{ le milieu } [AC], J' \text{ celui de } [BD].$$

$$a) \overrightarrow{I'B} + \overrightarrow{I'D} = \overrightarrow{I'J'} + \overrightarrow{J'B} + \overrightarrow{I'J'} + \overrightarrow{J'D}$$

$$= 2\overrightarrow{I'J'} + \underbrace{\overrightarrow{J'B} + \overrightarrow{J'D}}_{\vec{0}} \text{ car } J' \text{ est le milieu de } [BD].$$

$$= 2\overrightarrow{I'J'}$$

$$b) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AI'} + \overrightarrow{I'B} + \overrightarrow{CI'} + \overrightarrow{I'D}$$

$$= \underbrace{\overrightarrow{AI'} + \overrightarrow{CI'}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{I'D} + \overrightarrow{I'B}$$

$$= \vec{0} + 2\overrightarrow{I'J'} = 2\overrightarrow{I'J'} \text{ d'après a) } \overrightarrow{I'D} + \overrightarrow{I'B} = 2\overrightarrow{I'J'}$$

3. On définit le point E par $\overrightarrow{AE} = 3 \overrightarrow{AD}$, le point F est le symétrique de B par rapport à C et le point I par

$$a) \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3} \overrightarrow{DC} \text{ équivaut à } \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3} \overrightarrow{DC}$$

$$\text{équivaut à } \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3} \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AD}$$

$$\text{équivaut à } \overrightarrow{DI} = \frac{2}{3} \overrightarrow{DC}.$$

par suite les points C, D et I sont alignés.

b) Démontrer que $\overrightarrow{BE} = 3 \overrightarrow{BI}$.

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}$$

$$= \overrightarrow{BA} + 3 \overrightarrow{AD}$$

$$\text{D'autre part } \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{CD}$$

Comme ABCD est un parallélogramme alors $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

$$\text{On a donc } \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3} \overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3} \left(\overrightarrow{BA} + 3 \overrightarrow{AD} \right) = \frac{1}{3} \overrightarrow{BE} \text{ équivaut à } \overrightarrow{BE} = 3 \overrightarrow{BI}$$

c) Dans le triangle BDF, C est le milieu de [BF] donc [DC] est une médiane, et I, situé au tiers de cette médiane, est le centre de gravité, il est donc situé sur l'autre médiane [OF] les points F, O et I sont alignés.

$$d) \overrightarrow{AE} = 3 \overrightarrow{AD} \text{ donc } \overrightarrow{DE} = 2 \overrightarrow{AD} = 2 \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BF}$$

le quadrilatère DEFB est donc un parallélogramme

donc les droites (EF) et (BD) sont parallèles.

Comme O est sur (BD), les droites (EF) et (OD) sont parallèles

Devoir de synthèse N° 2 – 1

Exercice 1

I) Soit x un réel de l'intervalle $[2, 4]$ et $A = \frac{5x-7}{x-5}$

1. Encadrer $5x-7$, x^2 et $-2x^2+3$

2. Vérifier que $A = 5 + \frac{18}{x-5}$ puis encadrer A .

II) 1. Calculer $E = \frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} - \frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$

2. On pose $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Calculer a^2 puis vérifier que $a^2 = a + 1$

III) 1. Factoriser

$$A = 4x^2 + 4x + 1 + (2x+1)(4x+3) ; B = x^2 - x + 2(x-1)^2 ; C = 4x^2 - 36 + x(x+3)$$

2. a) Développer $(1-\sqrt{3})^2$

b) Factoriser $D = x^2 - (4-2\sqrt{3})$ et $E = (x-1)^2 + 2(1-\sqrt{3})(x-1) + (4-2\sqrt{3})$

Exercice 2

I) Soit un segment $[AB]$ de longueur 9cm et C le point de $[AB]$ tel que $AC = 6$ cm

1. Construire la droite D passant par C et perpendiculaire à (AB) et un point M de D tel que $CM=3$ cm
2. La perpendiculaire à (AB) passant par B coupe (AM) en N . Calculer BN .
3. La parallèle à (MB) passant par C coupe (AM) en P

comparer les rapports $\frac{AP}{AM}$ et $\frac{AC}{AB}$ puis $\frac{AM}{AN}$ et $\frac{AC}{AB}$.

En déduire $AM^2 = AN \cdot AP$

4. On pose H le projeté orthogonal de P sur (AB) .

Comparer les rapports $\frac{AH}{AC}$ et $\frac{AM}{AN}$

En déduire que les droites (MH) et (CN) sont parallèles.

Devoir de synthèse N° 2 – 2

Exercice 1

1. On donne trois réels non nuls a ; b et c . Simplifier les expressions suivantes :

$$X = (a^2 b^3)^{-3} \cdot (ab)^5 \cdot (a^{-5} b^4) ; Y = \frac{(ab^{-1} c^3)^2 \cdot (abc^3)^{-3}}{ab^{-4} (ab^2 c)^{-2}}$$

2. Déterminer les ensembles:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tel que } |3x - 1| = \frac{3}{5} \right\} ; B = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tel que } |2x + 1| \leq \frac{5}{3} \right\}$$

3. On donne $a = \frac{3}{1+\sqrt{5}}$ et $b = \frac{5}{-1+\sqrt{3}}$. Chercher une écriture à dénominateur entier pour chacun des réels a ; b et $a + b$

4. On donne deux réels x et y vérifiant : $-1 \leq x \leq 2$ et $-4 \leq y \leq -1$

a) Chercher un encadrement pour chacun des réels $x + 5$; $3x + 4$; $2y + 9$ et $x - y + 2$

b) On pose $c = \frac{3x+4}{x+5}$.

Vérifier que $c = 3 - \frac{11}{x+5}$ puis chercher un encadrement pour c .

5. On donne les réels $a = 120$ et $b = 396$

a) Décomposer les réels a et b en produit de facteurs premiers.

Déterminer PGCD(a, b) et PPCM(a, b)

b) Donner une écriture irréductible pour $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{7}{a} + \frac{5}{b}$

Exercice 2

On donne un triangle ABC isocèle en A tel que $\widehat{BAC} = 40^\circ$,

[Bx) est la bissectrice de \widehat{ABC} , [Bx) coupe [AC] en D.

1. Faites un dessin puis déterminer l'angle \widehat{BDC}
2. Soit Δ la droite parallèle à (BD) passant par C. Δ Coupe (AB) en E. Montrer que le triangle BCE est isocèle
3. On pose I le milieu de [EC]. Evaluer l'angle \widehat{CBI} . et montrer que le cercle (C) de diamètre [ID] passe par B.
4. la droite (AD) recoupe le cercle (C) en K. On pose O = I * D. Evaluer \widehat{BOK} .

Exercice 3

On donne un quadrilatère convexe ABCD et on pose O le point d'intersection de ses diagonales [AC] et [BD] . La parallèle à (BC) passant par O coupe (AB) en M et la parallèle à (DC) passant par O coupe (AD) en N.

1. Faites un dessin, puis montrer que les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AD}$ sont égaux
2. En déduire que les droites (MN) et (BD) sont parallèles.

Corrigé du devoir de synthèse N° 2 – 1

Exercice 1

I) Soit x un réel de l'intervalle $[2, 4]$ et $A = \frac{5x-7}{x-5}$

1. Encadrement de $5x-7$, x^2 et $-2x^2+3$:

- On a : $x \in [2, 4]$ équivaut à
 $2 \leq x \leq 4$ équivaut à $10 \leq 5x \leq 20$ équivaut à $3 \leq 5x-7 \leq 13$
- $2 \leq x \leq 4$ équivaut à $4 \leq x^2 \leq 16$
- $2 \leq x \leq 4$ équivaut à $4 \leq x^2 \leq 16$ équivaut à $-32 \leq -2x^2 \leq -8$
équivaut à $-29 \leq -2x^2+3 \leq -5$

$$2. A = \frac{5x-7}{x-5} = \frac{5(x-5)+18}{x-5} = \frac{5(x-5)}{(x-5)} + \frac{18}{x-5} = 5 + \frac{18}{x-5}.$$

De la relation $2 \leq x \leq 4$ équivaut à $-3 \leq x-5 \leq -1$ équivaut à

$$-1 \leq \frac{1}{x-5} \leq -\frac{1}{3} \text{ équivaut à } -18 \leq \frac{18}{x-5} \leq -\frac{18}{3} \text{ équivaut à } -13 \leq 5 + \frac{18}{x-5} \leq -1$$

donc $-13 \leq A \leq -1$

$$\text{II) } 1. E = \frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} - \frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{(3+\sqrt{2})^2 - (3-\sqrt{2})^2}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \frac{12\sqrt{2}}{7}$$

$$2. a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ donne } a^2 = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

$$a+1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{1+\sqrt{5}+2}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ donc } a^2 = a+1$$

III) 1. Factoriser

$$* A = 4x^2 + 4x + 1 + (2x+1)(4x+3) = (2x+1)^2 + (2x+1)(4x+3)$$

$$A = (2x+1)[(2x+1) + 4x+3] = 2(2x+1)(3x+2).$$

$$* B = x^2 - x + 2(x-1)^2 = x(x-1) + 2(x-1)^2 = (x-1)[x+2x-2]$$

$$B = (x-1)(3x-2).$$

$$* C = 4x^2 - 36 + x(x+3) = (2x-6)(2x+6) + x(x+3)$$

$$C = (4x-12)(x+3) + x(x+3) = (x+3)(4x-12+x) = (x+3)(5x-12)$$

2. a) $(1-\sqrt{3})^2 = 1+3-2\sqrt{3} = 4-2\sqrt{3}$.

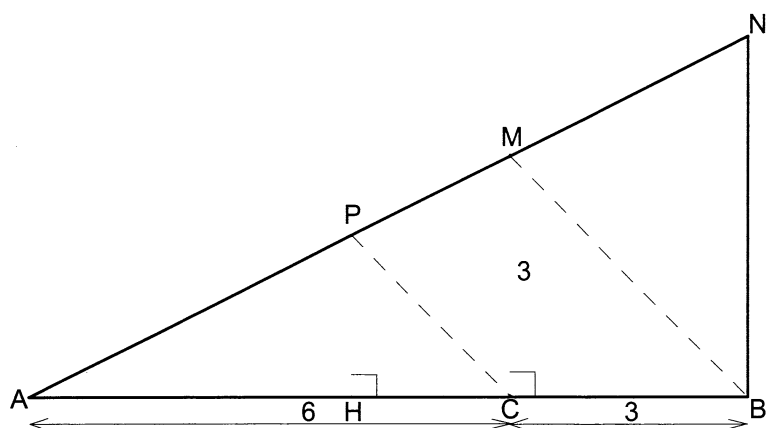
$$D = x^2 - (4-2\sqrt{3}) = x^2 - (\sqrt{3}-1)^2 = (x-\sqrt{3}+1)(x+\sqrt{3}-1)$$

b) $E = (x-1)^2 + 2(1-\sqrt{3})(x-1) + (4-2\sqrt{3}) = [x-1+1-\sqrt{3}]^2$

$$E = (x-\sqrt{3})^2.$$

Exercice 2

I) 1.



2. La perpendiculaire à (AB) passant par B coupe (AM) en N. En appliquant le théorème de Thalès on aura :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{MC}{BN} \Leftrightarrow BN = \frac{MC \times AB}{AC} = \frac{3 \times 9}{6} = \frac{9}{2} = 4,5$$

3. La parallèle à (MB) passant par C coupe (AM) en P donc

$$\frac{AP}{AM} = \frac{AC}{AB} \text{ et on a : } \frac{AM}{AN} = \frac{AC}{AB} \text{ donne } AM = \frac{AP \cdot AB}{AC} \text{ et } AM = \frac{AC \cdot AN}{AB} \text{ ce}$$

$$\text{que donne } AM^2 = \frac{AP \times AB}{AC} \times \frac{AC \times AN}{AB} = AP \times AN.$$

3. On pose H le projeté orthogonal de P sur (AB) .donc

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AP}{AM} \text{ et on a : } \frac{AP}{AM} = \frac{AC}{AB} = \frac{AM}{AN} \text{ donc } \frac{AH}{AC} = \frac{AM}{AN}, H \in [AC] \text{ et } M \in [AN]$$

d'après la réciproque du théorème de Thalès on déduit que (MH) et (CN) sont parallèles.

Corrigé du devoir de synthèse N° 2 – 2

Exercice 1

1.

$$X = (a^2b^3)^{-3} \cdot (ab)^5 \cdot (a^{-5}b^4) = a^{-6}b^{-9}a^5b^5a^{-5}b^4 = a^{-6}a^5a^{-5}b^{-9}b^5b^4 = a^{-6}$$

$$Y = \frac{(ab^{-1}c^3)^2 \cdot (abc^3)^{-3}}{ab^{-4}(ab^2c)^{-2}} = \frac{a^2b^{-2}c^6a^{-3}b^{-3}c^{-9}}{ab^{-4}a^2b^4c^{-2}} = \frac{a^{-1}b^{-5}c^{-3}}{a^{-1}b^{-8}c^{-2}} = b^3c^{-1}$$

2. $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tel que } |3x-1| = \frac{3}{5} \right\}$

$$|3x-1| = \frac{3}{5} \text{ équivaut à } 3x-1 = \frac{3}{5} \text{ équivaut à } 3x = \frac{3}{5}+1 \text{ ou } 3x-1 = -\frac{3}{5}$$

$$3x = \frac{3}{5}+1 \text{ équivaut à } 3x = \frac{8}{5} ; \quad 3x = -\frac{3}{5}+1 \text{ équivaut à } 3x = \frac{2}{5}$$

$$x = \frac{8}{15} \text{ où } x = \frac{2}{15} \text{ donc } A = \left\{ \frac{8}{15}, \frac{2}{15} \right\}.$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tel que } |2x+1| \leq \frac{5}{3} \right\}$$

$$|2x+1| \leq \frac{5}{3} \text{ équivaut à } -\frac{5}{3} \leq 2x+1 \leq \frac{5}{3} \text{ équivaut à } -\frac{5}{3}-1 \leq 2x \leq \frac{5}{3}-1$$

$$\text{équivaut à } -\frac{8}{3} \leq 2x \leq \frac{2}{3} \text{ équivaut à } -\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{1}{3} \text{ équivaut à } B = \left[-\frac{4}{3}, \frac{1}{3} \right]$$

3. $a = \frac{3}{1+\sqrt{5}} = \frac{3(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{3\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}^2-1^2} = \frac{3\sqrt{5}-3}{4}$

$$b = \frac{5}{-1+\sqrt{3}} = \frac{5(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{5\sqrt{3}+5}{\sqrt{3}^2-1^2} = \frac{5\sqrt{3}+5}{2}$$

$$a+b = \frac{5\sqrt{3}+5}{2} + \frac{3\sqrt{5}-3}{4} = \frac{3\sqrt{5}-3+10\sqrt{3}+10}{4} = \frac{7+3\sqrt{5}+10\sqrt{3}}{4}$$

4. $-1 \leq x \leq 2$ et $-4 \leq y \leq -1$

a) $-1 \leq x \leq 2$ équivaut à $4 \leq x+5 \leq 7$

$$-1 \leq x \leq 2 \text{ équivaut à } -3 \leq 3x \leq 6 \text{ équivaut à } 1 \leq 3x+4 \leq 10$$

$$-4 \leq y \leq -1 \text{ donne } -8 \leq 2y \leq -2 \text{ donne } 1 \leq 2y+9 \leq 7$$

$$-4 \leq y \leq -1 \text{ donne } \left. \begin{array}{l} 1 \leq -y \leq 4 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{array} \right\} \text{ donne } 0 \leq x-y \leq 6 \text{ donne } 2 \leq x-y+2 \leq 8$$

$$\text{b) } 3 - \frac{11}{x+5} = \frac{3(x+5)-11}{x+5} = \frac{3x+15-11}{x+5} = \frac{3x+4}{x+5} = c \text{ d'où } c = 3 - \frac{11}{x+5}$$

$$1 \leq 3x+4 \leq 10$$

$$-1 \leq x \leq 2 \text{ équivaut à } 4 \leq x+5 \leq 7 \text{ équivaut à } \frac{1}{7} \leq \frac{1}{x+5} \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{équivaut à } -\frac{11}{4} \leq -\frac{11}{x+5} \leq -\frac{11}{7} \text{ équivaut à } 3 - \frac{11}{4} \leq 3 - \frac{11}{x+5} \leq 3 - \frac{11}{7}$$

$$\text{équivaut à } \frac{1}{4} \leq \frac{3x+4}{x+5} \leq \frac{10}{7}$$

5. $a=120$ et $b=396$

a)

$$\left. \begin{array}{l} a = 2^3 \times 3 \times 5 \\ b = 2^2 \times 3^2 \times 11 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{p.g.c.d}(a,b) = 2^2 \times 3 = 12 \\ \text{et p.p.c.m}(a,b) = 2^3 \times 3^2 \times 11 \times 5 = 3960 \end{cases}$$

$$\text{b) } x = \frac{a}{b} \text{ et } y = \frac{7}{a} + \frac{5}{b} ; x = \frac{a}{b} = \frac{120}{396} = \frac{120}{396} = \frac{10}{33} ;$$

$$y = \frac{7}{a} + \frac{5}{b} = \frac{7}{2^3 \times 3 \times 5} + \frac{5}{2^2 \times 3^2 \times 11} = \frac{7 \times 3 \times 11}{2^3 \times 3^2 \times 11 \times 5} + \frac{5 \times 5 \times 2}{2^3 \times 3^2 \times 11 \times 5} = \frac{281}{3960}$$

Exercice 2

1. On a un triangle ABC isocèle en A

alors $\widehat{BAC} = \widehat{ACB}$

$$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180$$

$$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180 - \widehat{BAC} = 180 - 40 = 140$$

$$\text{donc } \widehat{ACB} = \widehat{ABC} = \frac{140}{2} = 70.$$

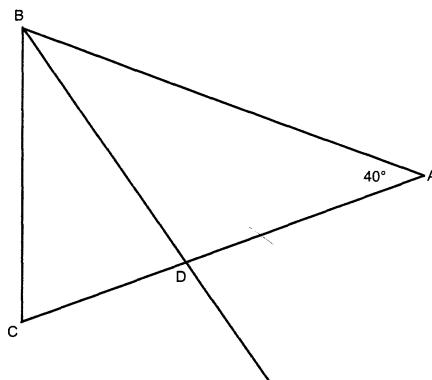
On a [Bx) la est la bissectrice de

$$\widehat{ABC} \text{ donne } \widehat{DBC} = \widehat{ABD} = \frac{70}{2} = 35.$$

On a BDC un triangle alors

$$\widehat{DBC} + \widehat{BDC} + \widehat{DCB} = 180$$

$$\widehat{BDC} = 180 - (\widehat{DBC} + \widehat{DCB}) = 180 - 105 = 75$$



2. On a $(BD) \parallel (EC)$ coupées par une sécante (BE) donc $\widehat{BEC} = \widehat{ABD}$ (correspondents)

On a $(BD) \parallel (EC)$ coupées par une sécante (BC)

Donc $\widehat{DBC} = \widehat{BCE}$ (alternes – internes)

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{DBC} = \widehat{BCE} \\ \widehat{BEC} = \widehat{ABD} \end{array} \right\} \text{et puisque } \widehat{ABD} = \widehat{DBC} \text{ alors } \widehat{BEC} = \widehat{BCE}$$

On a $\widehat{BEC} = \widehat{BCE}$ alors BCE est isocèle en B

3. On a BCE est isocèle en B alors

On a $\widehat{BEC} = \widehat{BCE} = \widehat{ABD} = \widehat{DBC}$ alors $\widehat{BEC} + \widehat{BCE} = \widehat{ABC} = 70$

$\widehat{CBE} + \widehat{BEC} + \widehat{BCE} = 180$ donc $\widehat{CBE} = 180 - 70 = 110$.

On a EBC un triangle isocèle en B et I le milieu de [EC] alors [BI] la bissectrice de \widehat{EBC} . [BI] est la bissectrice de \widehat{EBC}

$$\text{alors } \widehat{EBI} = \widehat{IBC} = \frac{\widehat{EBC}}{2} \text{ donc } \widehat{IBC} = 55$$

On a : $\widehat{IBD} = \widehat{IBC} + \widehat{CBD} = 55 + 35 = 90$ donc le triangle IBD un rectangle isocèle en B et puisque [ID] est le diamètre de (C) alors IBD est inscrit dans (C) d'où $B \in (C)$

4. On a $B \in (C)$ }
 $\left. \begin{array}{l} D \in (C) \\ K \in (C) \end{array} \right\} \text{ donne } \widehat{BDK} \text{ angle inscrit dans (C) est intercepte } [\widehat{BK}] \text{ (1)}$

$$\widehat{BDK} = 75 (K \in (AC))$$

On a : $O = I * D$ alors O est le centre de (C) alors \widehat{BOK} est angle au centre qui intercepte $[\widehat{BK}]$ (2). (1) et (2) donnent $\widehat{BOK} = 2\widehat{BDK} = 75 \times 2 = 150$

Exercice 3

1. Dans le triangle ACD on a :

(ON) \parallel (CD) alors d'après le théorème de

Thalès $\frac{AN}{AD} = \frac{AO}{AC}$ (1). Dans triangle ABC

on a : (MO) \parallel (BC) donc d'après le théorème

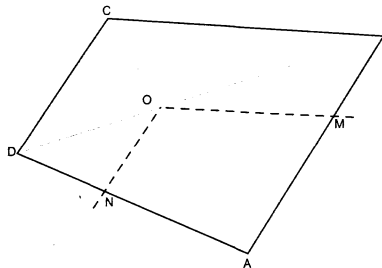
de Thalès $\frac{AM}{AB} = \frac{AO}{AC}$ (2). (1) et (2) donnent

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$$

2. On a ABC un triangle,

$M \in [AB]$ et $N \in [AD]$ et $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$. D'après

la réciproque de Thalès on a (MN) \parallel (BD).



Activités dans un repère

I. Activités pour bien assimiler mon cours

Activité 1

Dans un repère (O, I, J) du plan, on donne les points A(2;1) et B(-3;3)

1. Placer les points A et B
2. Déterminer Les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB}

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), si deux points A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$, alors le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Activité 2

Dans un repère (O, I, J), on donne A(1 ; 3) et B(-3 ; -1) :

1. Placer les points A et B dans (O, I, J)
2. Déterminer Les coordonnées du milieu M du segment [AB].
3. Calculer la distance entre les deux points A et B

COORDONNEES DU MILIEU D'UN SEGMENT

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors le milieu M du segment [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{x_B + x_A}{2}; \frac{y_B + y_A}{2} \right)$.

Distance entre deux points

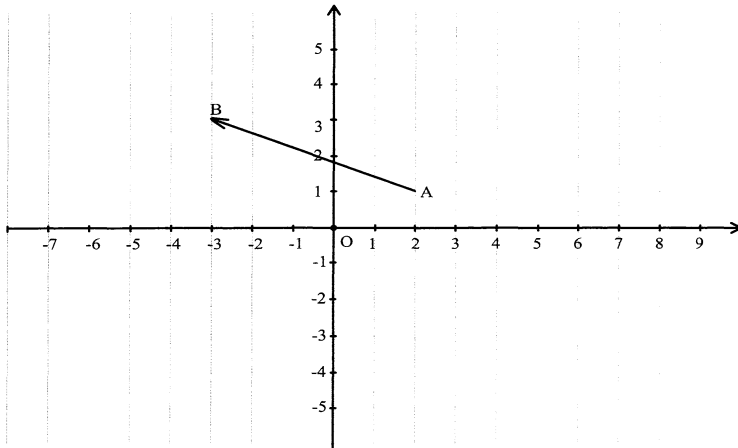
la distance entre deux points A et B est le réel positif définie par :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

II. Corrigés des activités (bien assimiler mon cours)

Activité 1

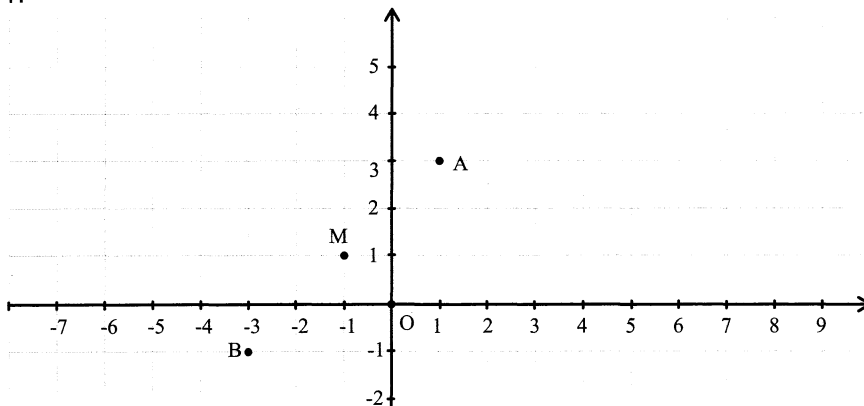
1.



2. Les coordonnées de \overrightarrow{AB} sont : $\begin{cases} x_B - x_A = -3 - 2 = -5 \\ y_B - y_A = 3 - 1 = 2 \end{cases}$ d'où $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Activité 2

1.



2. Les coordonnées du milieu M du segment [AB] sont :

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 - 3}{2} = -1 \\ \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1 \end{cases} \quad \text{d'où } M(-1 ; 1)$$

3. distance entre les deux points A(1,3) et B(-3,-1)

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

III. Exercices (je maîtrise mes connaissances)

Exercice 1

On se place dans un repère cartésien (O, I, J)

Soient les points $A(1;2)$; $B(4;3)$ et $C(-5,0)$

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC}
2. Montrer que le point $C \in (AB)$ et en déduire l'abscisse de C selon le repère (A, \overrightarrow{AB})
3. Soit E le point de (AB) d'abscisse 2 selon (A, \overrightarrow{AB}) . Chercher les coordonnées de E dans le repère (O, I, J)

Exercice 2

On se place dans un repère (O, I, J)

Soient les points $A\left(-\frac{7}{2}; 2\right)$, $B(-2; 5)$, $C\left(5; \frac{13}{2}\right)$ et $D\left(3; \frac{5}{2}\right)$

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} .
2. Montrer que \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires.
3. On définit le point I par l'égalité : $\overrightarrow{IA} = \frac{3}{4} \overrightarrow{ID}$.

Montrer que les coordonnées de I sont $\left(-23; \frac{1}{2}\right)$.

4. Les points I, B et C sont-ils alignés ?
5. J et K étant les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.
 - a) déterminer les coordonnées de J et K.
 - b) Démontrer alors que les points I, J et K sont alignés.

Exercice 3

Soit ABC un triangle quelconque. On place le point P symétrique de A par rapport à B, le point Q symétrique de B par rapport à C et le point R symétrique de C par rapport à A. On appelle I le milieu de $[BC]$ et K le milieu de $[PQ]$. on appelle G et H les centres de gravité des triangles ABC et PQR.

On choisit le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

1. Déterminer les coordonnées des points A, B et C.
2. Déterminer les coordonnées du point I, puis celles du point G.
3. Déterminer les coordonnées des points R, P, Q et K.
4. Démontrer que les points G et H sont confondus.

Exercice 4

1. Soit ABC un triangle quelconque du plan. H et G les points tels que

$$\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BG} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}. \text{ Placer H et G.}$$

2. On choisit le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

a) Donner les coordonnées des points A, B et C dans ce repère.

b) Déterminer les coordonnées des points H et G dans ce repère.

3. Les points A, G et H sont-ils alignés ?

Exercice 5

1. Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On considère les points

A(1; 2), B(2;1) et C(3; 2). Placer les points A, B et C .

2. Calculer les distances AB, AC et BC.

3. Démontrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle.

4. a) Placer, sur la figure, le point D tel que $\overline{AB} = \overline{DC}$

b) Démontrer que ABCD est un carré .

c) Déterminer les coordonnées du point D.

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On considère les points A(1; 2),

B(2; 4) et C(3; 1).

1. a) Calculer les distances AB, BC et CA.

b) En déduire la nature du triangle ABC.

c) Calculer l'aire du triangle ABC.

2. On considère le cercle circonscrit au triangle ABC.

a) Préciser la position de son centre E Calculer les coordonnées de ce point.

b) Déterminer la valeur exacte du rayon de ce cercle.

3. Calculer les coordonnées du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

Exercice 7

Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) on considère les points :A(-2;-3) ;

B(-4;4) et C(3 ; 6).

1. Faire une figure que l'on complètera tout au long du problème.

2. Calculer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{AC}

3. Calculer AB ; BC ; AC. Quelle est la nature du triangle ABC ?

4. Soit D le point tel que ABCD soit un parallélogramme. Calculer les coordonnées de D. Quelle est la nature de ABCD ?

5. Montrez que le triangle est inscrit dans un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

6. Montrez que D appartient au cercle.

7. Soit E l'image de C par la translation de vecteur \overrightarrow{AB} . Calculer les coordonnées de E. Quelle est la nature du quadrilatère ABEC ?

8. Calculez l'aire de ABEC ?

IV. Corrigés des exercices (je maîtrise mes connaissances)

Exercice 1

1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4-1 \\ 3-2 \end{pmatrix}$ signifie $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -5-1 \\ 0-2 \end{pmatrix}$ signifie $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. On a : $\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ signifie $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$

Donc \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires et A, B et C sont alignés, ainsi le point $C \in (AB)$

On a : $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB} \Rightarrow x_C = -2$ selon (A, \overrightarrow{AB})

3. $x_E = 2$ selon (A, \overrightarrow{AB}) équivaut à $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ équivaut à $\begin{pmatrix} x_E - 1 \\ y_E - 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

équivaut à $\begin{cases} x_E - 1 = 6 \\ y_E - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 7 \\ y_E = 4 \end{cases}$. Donc E(7,4) selon (O, I, J).

2^{ème} Méthode

$x_E = 2$ selon (A, \overrightarrow{AB}) équivaut à $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ équivaut à $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{AB}$

équivaut à $\overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA}$ équivaut à $\overrightarrow{OE} = 2(3\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}) + \overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ}$

équivaut à $\overrightarrow{OE} = 6\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ}$ équivaut à $\overrightarrow{OE} = 7\overrightarrow{OI} + 4\overrightarrow{OJ}$

d'où E(7,4).

Exercice 2

A $\left(-\frac{7}{2}; 2\right)$, B(-2; 5), C $\left(5; \frac{13}{2}\right)$ et D $\left(3; \frac{5}{2}\right)$

1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ équivaut à $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 - \left(-\frac{7}{2}\right) \\ 5 - 2 \end{pmatrix}$ équivaut à $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 3 - 5 \\ \frac{5}{2} - \frac{13}{2} \end{pmatrix}$ équivaut à $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

2. \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires donc $\overrightarrow{CD} = \alpha \overrightarrow{AB}$ équivaut à $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\text{équivalent à } \begin{cases} -2 = \frac{3}{2}\alpha \\ -4 = 3\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3} = \alpha \\ -\frac{4}{3} = \alpha \end{cases} \text{ d'où } \overrightarrow{CD} = -\frac{4}{3} \overrightarrow{AB}$$

2. Soit $I(x_I; y_I)$ alors $\overrightarrow{IA} \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} - x_I \\ 2 - y_I \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ID} \begin{pmatrix} 3 - x_I \\ \frac{5}{2} - y_I \end{pmatrix}$.

L'égalité $\overrightarrow{IA} = \frac{3}{4} \overrightarrow{ID}$ nous donne : $\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} - x_I \\ 2 - y_I \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 3 - x_I \\ \frac{5}{2} - y_I \end{pmatrix}$

$-\frac{7}{2} - x_I = \frac{3}{4}(3 - x_I)$ c'est à dire $-\frac{7}{2} - x_I = \frac{9}{4} - \frac{3}{4}x_I$

$2 - y_I = \frac{3}{4}(\frac{5}{2} - y_I)$ c'est à dire $2 - y_I = \frac{15}{8} - \frac{3}{4}y_I$

La première égalité donne : $\frac{1}{4}x_I = -\frac{7}{2} - \frac{9}{4} = -\frac{23}{4}$ donc $x_I = -23$

La deuxième égalité donne : $\frac{1}{4}y_I = 2 - \frac{15}{8} = \frac{1}{8}$ donc $y_I = \frac{1}{2}$

et $I \left(-23; \frac{1}{2} \right)$.

4. $\overrightarrow{IB} \begin{pmatrix} -2 - (-23) \\ 5 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ signifie $\overrightarrow{IB} \begin{pmatrix} 21 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IC} \begin{pmatrix} 5 - (-23) \\ \frac{13}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ signifie

$\overrightarrow{IC} \begin{pmatrix} 28 \\ 6 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{IB} = \alpha \overrightarrow{IC}$ signifie $\begin{pmatrix} 21 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 28 \\ 6 \end{pmatrix}$ signifie

$\begin{cases} 21 = 28\alpha \\ \frac{9}{2} = 6\alpha \end{cases}$ signifie $\begin{cases} \alpha = \frac{21}{28} \\ \alpha = \frac{9}{12} \end{cases}$ signifie $\begin{cases} \alpha = \frac{3}{4} \\ \alpha = \frac{3}{4} \end{cases}$ donc $\overrightarrow{IB} = \frac{3}{4} \overrightarrow{IC}$ donc \overrightarrow{IB} et \overrightarrow{IC}

sont colinéaires et les points I, B et C sont alignés.

5. a) J est le milieu de [AB], d'où
$$\begin{cases} x_J = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-\frac{1}{2} + (-2)}{2} = -\frac{11}{4} \\ y_J = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2 + 5}{2} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

d'où $J\left(-\frac{11}{4}, \frac{7}{2}\right)$. K est le milieu de [CD],

$$\text{d'où } \begin{cases} x_K = \frac{x_C + x_D}{2} = \frac{5+3}{2} = 4 \\ y_K = \frac{y_C + y_D}{2} = \frac{\frac{13}{2} + \frac{5}{2}}{2} = \frac{9}{2} \end{cases} \quad \text{donc } K\left(4; \frac{9}{2}\right).$$

$$\text{b) } \overrightarrow{IJ} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{4} - (-23) \\ \frac{7}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{81}{4} \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et } \overrightarrow{IK} = \begin{pmatrix} 4 - (-23) \\ \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{équivalent à } \overrightarrow{IK}$$

$$\begin{pmatrix} 27 \\ 4 \end{pmatrix}. \quad \overrightarrow{IJ} = \alpha \overrightarrow{IK} \quad \text{équivalent à } \begin{pmatrix} \frac{81}{4} \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 27 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{équivalent à}$$

$$\begin{cases} 27\alpha = \frac{81}{4} \\ 4\alpha = 3 \end{cases} \quad \text{équivalent à } \begin{cases} \alpha = \frac{81}{4 \times 27} \\ \alpha = \frac{3}{4} \end{cases} \quad \text{équivalent à } \begin{cases} \alpha = \frac{3}{4} \\ \alpha = \frac{3}{4} \end{cases}$$

donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{3}{4} \overrightarrow{IK}$ donc \overrightarrow{IJ} et \overrightarrow{IK} sont colinéaires et les points I, J et K sont alignés.

Exercice 3

1. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; 1)$.

2. I est le milieu de [BC], d'où $x_I = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$ et $y_I = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$

donc $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. G est le centre de gravité du triangle ABC, d'où

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AI} \quad \text{et } \overrightarrow{AI} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{d'où } \overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et } \overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix} \quad \text{Donc}$$

$$x_G = \frac{1}{3} \quad \text{et } y_G = \frac{1}{3} \quad \text{et } G\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

3. R est la symétrique de C par rapport à A, d'où A est le milieu de [RC]

et on a alors $x_A = \frac{x_C + x_R}{2}$ d'où $0 = \frac{0 + x_R}{2}$ et $x_R = 0$ et $y_A = \frac{y_C + y_R}{2}$ d'où

$0 = \frac{1 + y_R}{2}$ et $y_R = -1$ Donc $R(0; -1)$. En faisant de même pour P et Q, on

obtient $P(2; 0)$ et $Q(-1; 2)$. De plus K est le milieu de [PQ],

donc $x_K = \frac{x_P + x_Q}{2} = \frac{1}{2}$ et $y_K = \frac{y_P + y_Q}{2} = 1$. Donc $K\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

H est le centre de gravité du triangle PQR, d'où $\overrightarrow{RH} = \frac{2}{3} \overrightarrow{RK}$. et $\overrightarrow{RK} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ d'où

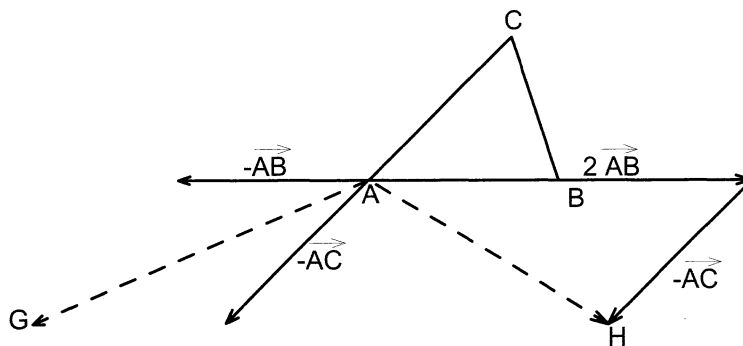
$\overrightarrow{RK} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RK} \begin{pmatrix} x_H \\ x_H + 1 \end{pmatrix}$ d'où $x_H = \frac{1}{3}$ et $y_H = \frac{1}{3}$ et $H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

G et H ont les mêmes coordonnées, ils sont donc confondus.

Exercice 4

ABC est un triangle.

1. $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BG} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$



2. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

a) $\overrightarrow{AB} = 1 \times \overrightarrow{AB} + 0 \times \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC} = 0 \times \overrightarrow{AB} + 1 \times \overrightarrow{AC}$ d'où $A(0; 0)$
 $B(1; 0)$ et $C(0; 1)$

b) • $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ équivaut à $H(2, -1)$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

• $\overrightarrow{BG} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ équivaut à $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

équivaut à $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA}$

équivaut à $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$

équivaut à $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AC}$ signifie $G(0, -1)$

3. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

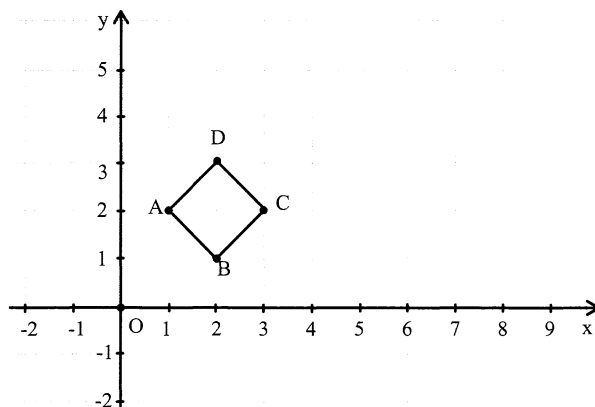
$\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Supposons que \overrightarrow{AG} et \overrightarrow{AH} sont colinéaires

alors $\overrightarrow{AG} = \alpha \overrightarrow{AH}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ équivaut à $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ équivaut à $\begin{cases} 2\alpha = 0 \\ -\alpha = -1 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases}$ impossible donc \overrightarrow{AG} et \overrightarrow{AH} ne sont pas colinéaires.

Exercice 5

1.



2. $A(1; 2)$, $B(2; 1)$ et $C(3; 2)$.

- distance AB : $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ équivaut à $AB^2 = (2-1)^2 + (1-2)^2 = 2$.
- distance AC : $AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2$ équivaut à $AC^2 = (3-1)^2 + (2-2)^2 = 4$
- distance BC : $BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2$ équivaut à $BC^2 = (2-1)^2 + (1-2)^2 = 2$

Donc : $AB = \sqrt{2}$ cm, $AC = 2$ cm et $BC = \sqrt{2}$ cm.

3. On a : $AC^2 = 4$ et $AB^2 + BC^2 = 2 + 2 = 4$.

Comme $AC^2 = AB^2 + BC^2$, alors d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est un triangle rectangle en B.

De plus, comme $AB = BC$, alors ABC est isocèle en B.

Le triangle ABC est donc rectangle et isocèle en B.

4. a) Voir figure

b) Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors ABCD est un parallélogramme. De plus, comme ABC est un triangle rectangle B, alors ABCD est un rectangle.

Comme ABC est isocèle en B, alors ABCD est un carré.

c) On a : $\overline{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overline{DC} \begin{pmatrix} 3-x_D \\ 2-y_D \end{pmatrix}$. Comme $\overline{AB} = \overline{DC}$, alors :

$$\begin{cases} 3-x_D = 1 \\ 2-y_D = -1 \end{cases} \text{ signifie } \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = 3 \end{cases}. D \text{ a pour coordonnées } (2; 3).$$

Exercice 6

1. a) • Distance AB : $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

$$AB^2 = (2-1)^2 + (4-2)^2 = 5$$

• Distance AC : $AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2$ équivaut à

$$AC^2 = (3-1)^2 + (1-2)^2 = 5$$

• Distance BC : $BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2$ signifie

$$BC^2 = (3-2)^2 + (1-4)^2 = 10.$$

$$\text{Donc : } AB = \sqrt{5} \text{ cm, } AC = \sqrt{5} \text{ cm et } BC = \sqrt{10} \text{ cm.}$$

b) $AB^2 + BC^2 = 5+5 = 10$ Comme $AB^2 + BC^2 = AC^2$, alors d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

c) $A_{ABC} = \text{Aire du triangle ABC} : A_{ABC} = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{50}}{2} \text{ cm}^2$

2. a) Comme le triangle ABC est rectangle en B, alors ce triangle est inscrit dans un cercle qui a pour diamètre l'hypoténuse [AC].

Le centre E du cercle circonscrit au triangle ABC est donc le milieu du segment [AC]. Calculons ses coordonnées x et y

$$\begin{cases} x = \frac{x_A + x_C}{2} \\ y = \frac{y_A + y_C}{2} \end{cases} \text{ signifie } \begin{cases} x = \frac{1+3}{2} \\ y = \frac{2+1}{2} \end{cases} \text{ signifie } \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Les coordonnées du point E sont : $\left(2; \frac{3}{2}\right)$

b) Ce cercle a pour rayon EA. Calculons donc la distance EA :

$$EA^2 = (x_A - x_E)^2 + (y_A - y_E)^2 = (1-2)^2 + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\text{Donc Le rayon du cercle est: } EA = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ cm}$$

3. $ABDC$ est un parallélogramme, alors $\vec{CA} = \vec{DB}$. Or, $\vec{CA} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et

$$\vec{BD} \begin{pmatrix} x_D - 2 \\ y_D - 4 \end{pmatrix} ; \vec{BD} = \vec{CA} \text{ signifie } \begin{cases} x_D - 2 = -2 \\ y_D - 4 = 1 \end{cases} \text{ signifie } \begin{cases} x_D = 0 \\ y_D = 5 \end{cases}$$

d'où $D(0,5)$

Exercice 7

2. $\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ signifie $\vec{AB} \begin{pmatrix} -4 + 2 \\ 4 + 3 \end{pmatrix}$

signifie $\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\vec{BC} \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$

signifie $\vec{BC} \begin{pmatrix} 3 + 4 \\ 6 - 4 \end{pmatrix}$ signifie $\vec{BC} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. $AC = \sqrt{5^2 + 9^2} = \sqrt{25 + 81} = \sqrt{106}$,

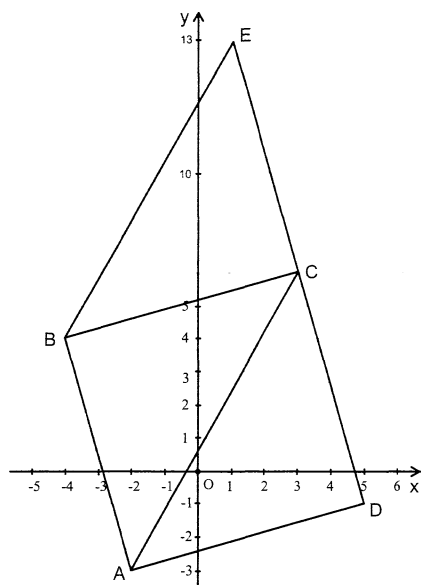
$BC = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{49 + 4}$

$= \sqrt{53}$. $AB = \sqrt{(-2)^2 + 7^2}$

$= \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}$.

$AB = BC = \sqrt{53}$ donc ABC est un triangle isocèle. De plus : $AC^2 = 106$ et $AB^2 + BC^2 = 53 + 53 = 106$.

Donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore ABC est un triangle rectangle et isocèle en B .



4. Soit $D(x; y)$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

$\vec{AB} = \vec{DC}$; $\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{DC} \begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix}$ signifie $\vec{DC} \begin{pmatrix} 3 - x \\ 6 - y \end{pmatrix}$

Si deux vecteurs sont égaux alors leurs coordonnées sont égales

$\vec{AB} = \vec{DC}$ équivaut à $\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - x \\ 6 - y \end{pmatrix}$ équivaut à $\begin{cases} 3 - x = -2 \\ 6 - y = 7 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$

donc $D(5; -1)$. $ABCD$ est un parallélogramme qui a un angle droit donc $ABCD$ est un rectangle de plus $BC = AB$. donc $ABCD$ est un carré

5. ABC est un triangle rectangle en B donc ABC est inscrit dans le cercle de diamètre [AC]. Le rayon du cercle est donc $\frac{\sqrt{106}}{2}$ Le centre du cercle est M

le milieu de [AC] donc $M\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}\right)$ signifie $M\left(\frac{-2+3}{2}; \frac{-3+6}{2}\right)$

signifie $M\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$

ABC est inscrit dans le cercle de centre M et de rayon $\frac{\sqrt{106}}{2}$

6. Dans un carré les diagonales sont égales et se coupent en leur milieu donc

$MA = MD = \frac{\sqrt{106}}{2}$ donc D appartient au cercle $\zeta_{(M,r)}$ avec $r = \frac{\sqrt{106}}{2}$

7. Soit $E(x; y)$ l'image de C par la translation de vecteur \vec{AB}

donc $\vec{AB} = \vec{CE}$ avec $\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{CE} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-6 \end{pmatrix}$

$\vec{AB} = \vec{CE}$ équivaut à $\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y-6 \end{pmatrix}$ équivaut à $\begin{cases} x-3 = -2 \\ y-6 = 7 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} x = 1 \\ y = 13 \end{cases}$ donc $E(1; 13)$.

8. D'après 7) $\vec{AB} = \vec{CE}$ donc ABEC est un parallélogramme

L'aire d'un parallélogramme est égale au produit d'un côté par la hauteur correspondante. Donc $Aire(ABEC) = BC \times AB$ car (CB) et (BA) sont perpendiculaires.

$$Aire(ABEC) = \sqrt{53} \times \sqrt{53} = 53cm^2$$

Systèmes de deux équations à deux inconnues

I. Activités pour bien assimiler mon cours

Activité 1

Soit l'équation (E) : $2x + y - 1 = 0$.

- 1) Déterminer une solution de cette équation.
- 2) Déterminer t pour que (t, 1) soit une solution de (E).
- 3) Déterminer z pour que (-1, z) soit une solution de (E).

Activité 2

- 1) Donner deux couples de réels solutions de l'équation :
 $2x - y = -3$
- 2) Représenter graphiquement les solutions de cette équation.
- 3) Donner dans \mathbb{R}^2 tous les couples solutions de cette équation.

Les trois méthodes de résolution d'un système.

1^{ère} Méthode de substitution Substituer, c'est remplacer par

Activité 1

Suivre les indications pour résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$$

Première étape :

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases} \text{ signifie } \begin{cases} (1) \ y = \dots \\ (2) \ 2x - 3(\dots) = 7 \end{cases}$$

Deuxième étape :

Conserver l'équation (1) et Calculer la valeur de x dans l'équation (2)

Troisième étape :

Remplacer x dans (1) par la valeur trouvée, et calculer y

Conclusion : $S_{\mathbb{R}^2} = \{(\dots, \dots)\}$

Deuxième méthode : Méthode d'addition (ou par élimination)

Activité 2

Suivre les indications pour résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} (1) \ 3x + 2y = 7 \\ (2) \ 5x - 2y = 1 \end{cases}$$

Première étape :

Ecrire l'équation obtenue en ajoutant membre à membre les équations (1) et (2)

$$\Rightarrow (1) + (2) \Rightarrow \dots\dots\dots = 8$$

$$\begin{cases} (1') \dots\dots\dots = 8 \\ (2) 5x - 2y = 1 \end{cases} \quad \text{de l'équation (1')} \text{ on a : } x = \dots$$

Deuxième étape :

Conserver la valeur de $x \Rightarrow$

Remplacer x par sa valeur dans l'équation (2) et calculer $y \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \end{cases} \quad \text{d'où } S_{\mathbb{R}^2} = \{(\dots, \dots)\}$$

Troisième méthode : Méthode graphique

Activité 3

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} (1) 2x - y = -2 \\ (2) x + y = 2 \end{cases}$$

- 1) L'équation (1) est celle de la droite D_1 .
La droite D_1 est d'équation $y = \dots\dots\dots$
L'équation (2) est celle de la droite D_2 .
La droite D_2 est d'équation $y = \dots\dots\dots$
- 2) Tracer les droites D_1 et D_2 sur le même graphique.
- 3) Relever les coordonnées du point I, intersection des deux droites.
 $I(\dots\dots\dots ; \dots\dots\dots)$.
Les coordonnées du $\dots\dots\dots$ vérifient les deux équations et sont solutions du système proposé

II. Corrigés des activités (bien assimiler mon cours)

Activité 1

Soit l'équation (E) : $2x + y - 1 = 0$.

- 1) Pour $x = 0$ on a : $y - 1 = 0$ équivaut à $y = 1$
d'où $(x, y) = (0, 1)$ est une solution de (E).
- 2) $(t, 1)$ est une solution de (E) équivaut à $2t + 1 - 1 = 0$
équivaut à $2t = 0$ équivaut à $t = 0$
- 3) $(-1, z)$ soit une solution de (E) équivaut à $-2 + z - 1 = 0$ équivaut à $z = 3$

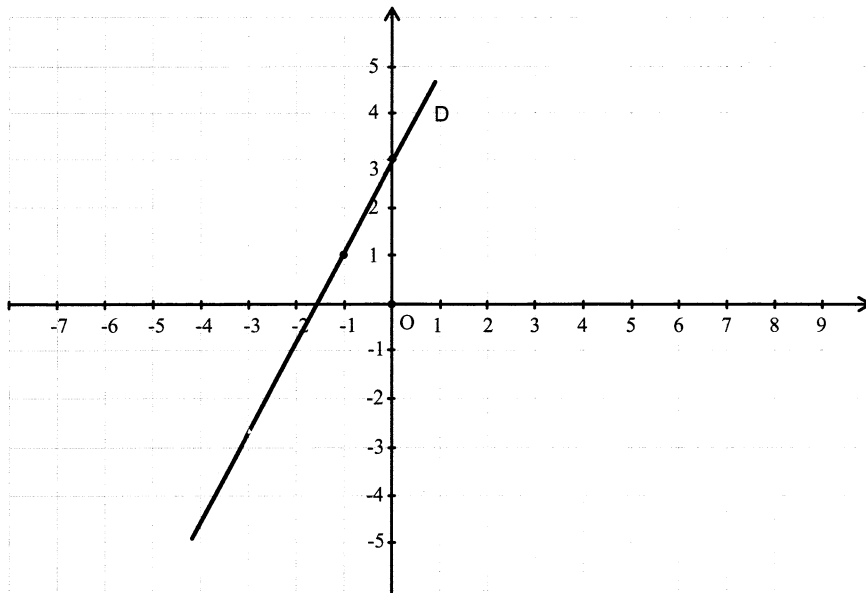
Activité 2

1) • Pour $x = -1$ on a : $2(-1) - y = -3$ équivaut à $-y = -1$ équivaut à $y = 1$.

• Pour $x = 0$ on a : $2(0) - y = -3$ équivaut à $y = 3$

Les couples $(-1, 1)$ et $(0, 3)$ sont solutions de l'équation : $2x - y = -3$

2) Soit D la droite d'équation : $2x - y = -3$ signifie $y = 2x + 3$



3) $2x - y = -3$ équivaut à $y = 2x + 3$ d'où $S_{\mathbb{R}^2} = \{ (x, 2x + 3) \}$ avec $x \in \mathbb{R}$

III. Exercices (je maîtrise mes connaissances)

Exercice 1

Résoudre par substitution dans \mathbb{R}^2 chacun des systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ 5x - y = 7 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ -2x + y = 12 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - \frac{1}{2}y + 3 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x - \frac{1}{2}y = 3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ -\frac{3}{2}x + y = -4 \end{cases}$

Exercice 2

Résoudre par addition dans \mathbb{R}^2 chacun des systèmes suivants :

$$1) \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x - 2y = 3 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 4x - 5y + 3 = 9 \\ 2x + 3y + 16 = 0 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases}$$

Exercice 3

1) Trouver deux couples solutions pour chacune des équations suivantes :
 $2x + y = 4$ et $3x - y = 1$.

2) Représenter les droites : $D_1 : y = -2x + 4$ et $D_2 : y = 3x - 1$.

3) En déduire l'ensemble des solutions du système : $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

4) En déduire l'ensemble des solutions du système : $\begin{cases} 2|x| + |y| = 4 \\ 3|x| - |y| = 1 \end{cases}$

Exercice 4

Résoudre dans \mathbb{R}^2 chacun des systèmes suivants :

$$1) \begin{cases} 2(x+3) + 3(y-1) = -4 \\ 5(2-x) - y = 7-x \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{2x}{3} + y - 1 = \frac{-4+y}{4} \\ \frac{(5-x)}{2} - \frac{y}{3} = \frac{1-x}{2} \end{cases}$$

Exercice 5

1) Résoudre dans \mathbb{R}^2 le système suivant : $\begin{cases} t + z = 5 \\ 3t - z = 3 \end{cases}$

2) En déduire les solutions du système : $\begin{cases} \frac{1}{x+2} + \frac{1}{y-3} = 5 \\ \frac{3}{x+2} - \frac{1}{y-3} = 3 \end{cases}$

Exercice 6

Résoudre dans \mathbb{R}^2 chacun des systèmes suivants :

$$1) \begin{cases} 2|x| + y = 4 \\ -|x| - 4y = 12 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} -|x| + 5|y| = 8 \\ 3|x| - 2|y| = 2 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x^2 + y = -5 \\ 2x^2 - 4y = 14 \end{cases}$$

Exercice 7

1) On donne le système (S) :
$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

- a) Résoudre dans \mathbb{R}^2 le système (S).
- b) En déduire l'ensemble des solutions du système

$$(S') : \begin{cases} 3|x-3| - |y-2| = 0 \\ 2|x-3| + |y-2| = 5 \end{cases}$$

2) Résoudre dans \mathbb{R}^2 le système :
$$\begin{cases} (3x-y)(x-y) = 0 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Exercice 8

Une salle de spectacles propose des spectacles pour un tarif A et des spectacles pour un tarif B.

Allia réserve 1 spectacle au tarif A et 3 spectacles au tarif B. Elle paie 48 dinars.

Mohamed réserve 2 spectacles au tarif A et 1 spectacle au tarif B. Il paie 41 dinars.

On cherche à calculer le prix d'un spectacle au tarif A et le prix d'un spectacle au tarif B.

Exercice 9

1) Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} x + 2y = 165 \\ 3x + y = 195 \end{cases}$$

2) Dans une salle de bains, un néon et deux lampes consomment 165 watts.

Dans une cuisine, six néons et deux lampes consomment 390 watts.

Quelle est la consommation, en watts, d'un néon ? Quelle est celle d'une lampe ?

Exercice 10

La secrétaire du lycée a acheté 22 timbres, les uns à 250 millimes et les autres à 220 millimes. Elle a payé en tout 5290 millimes.

Combien de timbres de chaque sorte a-t-elle acheté ?

IV. Corrigés des exercices (je maîtrise mes connaissances)

Exercice 1

1)	$\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ 5x - y = 7 \end{cases}$ <p>On isole y dans la seconde équation et on remplace dans la première, puis on résout l'équation en x</p>	
	$\begin{cases} y = 5x - 7 \\ 2x + 3(5x - 7) = -4 \end{cases}$	équivalent à $\begin{cases} y = 5x - 7 \\ 2x + 15x - 21 + 4 = 0 \end{cases}$
	équivalent à $\begin{cases} y = 5x - 7 \\ 17x = 17 \end{cases}$	<p>équivalent à $\begin{cases} y = -2 \\ x = 1 \end{cases}$</p> <p>D'où $S_{\mathbb{R}^2} = \{(1, -2)\}$</p>

2)	$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ -2x + y = 12 \end{cases}$ <p>On isole x dans la première équation et on remplace dans la deuxième, puis on résout l'équation en y.</p>	
	$\begin{cases} x = 1 - 3y \\ -2(1 - 3y) + y = 12 \end{cases}$	équivalent à $\begin{cases} x = 1 - 3y \\ 7y = 14 \end{cases}$
	équivalent à $\begin{cases} x = 1 - 3y \\ y = 2 \end{cases}$	<p>équivalent à $\begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \end{cases}$</p> <p>D'où $S_{\mathbb{R}^2} = \{(-5, 2)\}$</p>

3)	$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y + 3 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$ <p>On isole x dans la première équation et on remplace dans la deuxième, puis on résout l'équation en y</p>	
	$\begin{cases} x = \frac{1}{2}y - 3 \\ 2\left(\frac{1}{2}y - 3\right) + y - 2 = 0 \end{cases}$	équivalent à $\begin{cases} x = \frac{1}{2}y - 3 \\ y - 6 + y - 2 = 0 \end{cases}$
	équivalent à $\begin{cases} x = \frac{1}{2}y - 3 \\ 2y - 8 = 0 \end{cases}$	<p>équivalent à $\begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$</p> <p>D'où $S_{\mathbb{R}^2} = \{(-1, 4)\}$</p>

4)	$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x - \frac{1}{2}y = 3 \end{cases}$ <p>On isole y dans la première équation et on remplace dans la deuxième, puis on résout l'équation en x</p>	
	$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ x - \frac{1}{2}(2x - 4) = 3 \end{cases} \text{ équivaut à }$	$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ x - x + 2 = 3 \end{cases} \text{ équivaut à }$
	$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ 0 \times x = 1 \end{cases}$	L'équation (2) est impossible d'où $S_{\mathbb{R}^2} = \emptyset$
5)	$\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ -\frac{3}{2}x + y = -4 \end{cases} \text{ équivaut à }$	$\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ y = \frac{3}{2}x - 4 \end{cases} \text{ équivaut à }$
	$\begin{cases} 3x - 2\left(\frac{3}{2}x - 4\right) = 8 \\ y = \frac{3}{2}x - 4 \end{cases} \text{ équivaut à }$	$\begin{cases} 3x - 3x + 8 = 8 \\ y = \frac{3}{2}x - 4 \end{cases} \text{ équivaut à }$
	$\begin{cases} 0 \times x = 0 \\ y = \frac{3}{2}x - 4 \end{cases}$	<p><u>Le système admet une infinité de solutions</u></p> $S_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \left(x, \frac{3}{2}x - 4 \right) \text{ avec } x \in \mathbb{R} \right\}$

Exercice 2

1)	$\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ 5x - y = 7 \end{cases}$ <p>On multiplie les deux membres de l'équation (2) par 3 et on « élimine » y en additionnant membre à membre les deux équations ; on conserve comme deuxième équations l'équation « la plus simple » on obtient :</p>	
	$\begin{aligned} (1) & \begin{cases} 2x + 3y = -4 \end{cases} \\ (2) & \begin{cases} 15x - 3y = 21 \end{cases} \end{aligned} \text{ équivaut à } \begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ 17x = 17 \end{cases} \text{ équivaut à }$	
	$\begin{cases} 3y = -6 \\ x = 1 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} y = -2 \\ x = 1 \end{cases} \text{ d'où } S_{\mathbb{R}^2} = \{(1, -2)\}$	
2)	$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ -2x + y = 12 \end{cases}$ <p>On multiplie les deux membres de l'équation (1) par 2 et on « élimine » x en additionnant membre à membre les deux équations ; on conserve comme deuxième équations l'équation « la plus simple ». on obtient :</p>	

	$\begin{cases} 2x + 6y = 2 \\ -2x + y = 12 \end{cases}$	équivalent à $\begin{cases} 7y = 14 \\ -2x + y = 12 \end{cases}$
	équivalent à $\begin{cases} y = 2 \\ -2x + 2 = 12 \end{cases}$	équivalent à $\begin{cases} y = 2 \\ x = -5 \end{cases}$ d'où $S_{\mathbb{R}^2} = \{(-5, 2)\}$

3)	$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y + 3 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$ équivalent à	On multiplie les deux membres de l'équation (1) par 2 et on « élimine » x $\begin{cases} 2x - y + 6 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$ équivalent à
	$\begin{cases} 4x + 4 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$ équivalent à	$\begin{cases} x = -1 \\ -2 + y - 2 = 0 \end{cases}$ équivalent à
	$\begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$ d'où $S_{\mathbb{R}^2} = \{(-1, 4)\}$	

4)	$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases}$ équivalent à	On multiplie les deux membres de l'équation (1) par 2 et on « élimine » y équivalent à $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases}$
	équivalent à $\begin{cases} 0 \times x - 0 \times y = 5 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases}$	Impossible d'où $S_{\mathbb{R}^2} = \emptyset$

Exercice 3

1) $2x + y = 4$ (1)

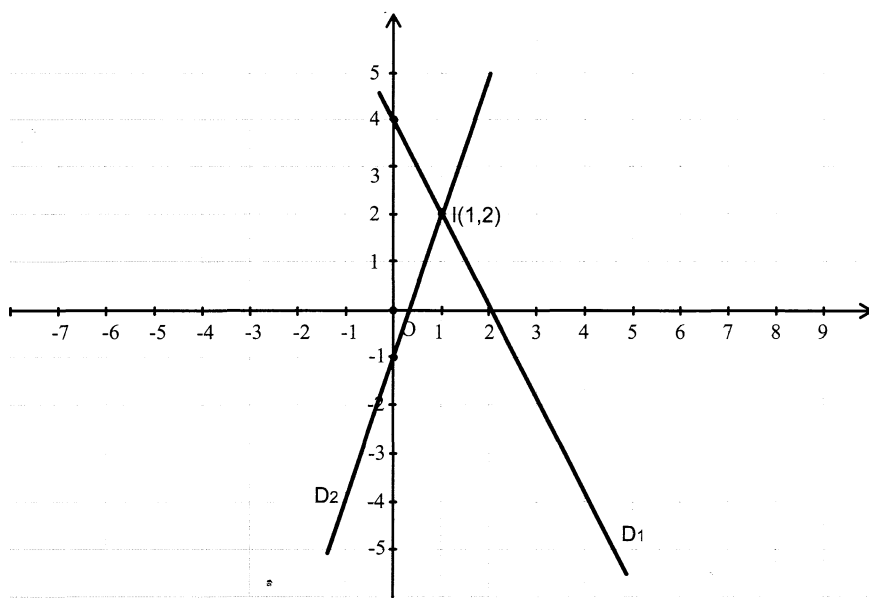
- Pour $x = 0$ on a : $y = 4$ d'où $(0, 4)$ est une solution de (1)
- Pour $x = 1$ on a : $y = 2$ d'où $(1, 2)$ est une solution de (1)

$3x - y = 1$ (2)

- Pour $x = 0$ on a : $y = -1$ d'où $(0, -1)$ est une solution de (2)
- Pour $x = 1$ on a : $y = 2$ d'où $(1, 2)$ est une solution de (2)

2) Représentation graphique des droites :

$D_1 : y = -2x + 4$ et $D_2 : y = 3x - 1$.



3) Les deux droites se coupent en un point I dont les coordonnées (1,2) donnent la solution du système.

4) On pose $|x| = X$ et $|y| = Y$

$$\begin{cases} 2|x| + |y| = 4 \\ 3|x| - |y| = 1 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 2X + Y = 4 \\ 3X - Y = 1 \end{cases}$$

D'après 3) on a : $x = 1$ et $Y = 2$ équivaut à

$|x| = 1$ et $|y| = 2$ équivaut à $(x = 1 \text{ ou } x = -1)$ et $(y = 2 \text{ ou } y = -2)$

d'où $S_{\mathbb{R}^2} = \{(-1, 2); (1, 2); (-1, -2); (1, -2)\}$

Exercice 4

$$1) \begin{cases} 2(x+3) + 3(y-1) = -4 \\ 5(2-x) - y = 7 - x \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 2x + 6 + 3y - 3 = -4 \\ 10 - 5x - y + x = 7 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 2x + 3y = -7 \\ -4x - y = -3 \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} 2x + 3y = -7 \\ -12x - 3y = -9 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} -10x = -16 \\ y = 3 - 4x \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ y = 3 - \frac{32}{5} \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ y = -\frac{17}{5} \end{cases} \text{ d'où } S_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \left(\frac{8}{5}; -\frac{17}{5} \right) \right\}.$$

$$\begin{aligned}
2) \quad & \begin{cases} \frac{2x}{3} + y - 1 = \frac{-4+y}{4} \\ \frac{(5-x)}{2} - \frac{y}{3} = \frac{1-x}{2} \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} \frac{2x+3y-3}{3} = \frac{-4+y}{4} \\ \frac{3(5-x)-2y}{6} = \frac{1-x}{2} \end{cases} \text{ équivaut à} \\
& \begin{cases} 4(2x+3y-3) = 3(-4+y) \\ 6(5-x)-4y = 6(1-x) \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 8x+12y-12 = -12+3y \\ 30-6x-4y = 6-6x \end{cases} \text{ équivaut à} \\
& \begin{cases} 8x+9y = 0 \\ -4y = -24 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x = -\frac{9}{8}y \\ y = 6 \end{cases} \\
& \begin{cases} x = -\frac{27}{8} \\ y = 6 \end{cases} \quad \text{d'où } S_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \left(-\frac{27}{8}; 6 \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Exercice 5

$$\begin{aligned}
1) \quad & \begin{cases} t+z=5 \\ 3t-z=3 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 4t=8 \\ 3t-z=3 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} t=2 \\ 6-z=3 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} t=2 \\ z=3 \end{cases} \\
& \text{d'où } S_{\mathbb{R}^2} = \{(2,3)\}
\end{aligned}$$

$$2) \quad \text{On pose } \frac{1}{x+2} = t \text{ et } \frac{1}{y-3} = z \text{ d'où } \begin{cases} \frac{1}{x+2} + \frac{1}{y-3} = 5 \\ \frac{3}{x+2} - \frac{1}{y-3} = 3 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} t+z=5 \\ 3t-z=3 \end{cases}$$

et d'après 1) on a : $t = 2$ et $z = 3$

$$\bullet t = 2 \text{ équivaut à } \frac{1}{x+2} = 2 \text{ équivaut à } 2x+4=1 \text{ équivaut à } x = -\frac{3}{2}$$

$$\bullet z = 3 \text{ équivaut à } \frac{1}{y-3} = 3 \text{ équivaut à } 3y-9=1 \text{ équivaut à } y = \frac{10}{3}$$

$$\text{d'où } S_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \left(-\frac{3}{2}, \frac{10}{3} \right) \right\}$$

Exercice 6

$$1) \quad \begin{cases} 2|x|+y=4 \\ -|x|-4y=12 \end{cases} \quad \text{on pose } |x| = t; \text{ le système est équivalent à :}$$

$$\begin{cases} 2t + y = 4 \\ -t - 4y = 12 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} y = 4 - 2t \\ -t - 4y = 12 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} y = 4 - 2t \\ -t - 4(4 - 2t) = 12 \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} y = 4 - 2t \\ -t - 16 + 8t = 12 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} y = 4 - 2t \\ 7t = 28 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} y = -4 \\ t = 4 \end{cases}$$

or $t = |x|$ équivaut à $4 = |x|$ équivaut à $x = 4$ ou $x = -4$,

$$S_{\mathbb{R}^2} = \{(4, -4); (-4, -4)\}$$

2) S: $\begin{cases} -|x| + 5|y| = 8 \\ 3|x| - 2|y| = 2 \end{cases}$ on pose $|x| = z$ et $|y| = t$; le système S est équivalent à :

$$\begin{cases} -z + 5t = 8 \\ 3z - 2t = 2 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} -3z + 15t = 24 \\ 3z - 2t = 2 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 13t = 26 \\ 3z - 2t = 2 \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} t = 2 \\ 3z - 4 = 2 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} t = 2 \\ z = 2 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} |y| = 2 \\ |x| = 2 \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} y = 2 \text{ ou } y = -2 \\ x = 2 \text{ ou } x = -2 \end{cases}$$

d'où $S_{\mathbb{R}^2} = \{(-2, 2); (-2, -2); (2, 2); (2, -2)\}$

3) S: $\begin{cases} x^2 + y = -5 \\ 2x^2 - 4y = 14 \end{cases}$ on pose $x^2 = t$; le système S est équivalent à :

$$\begin{cases} t + y = -5 \\ t - 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = -12 \\ t - 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ t + 8 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ t = -1 \end{cases}$$

or $t = x^2 = -1$ impossible d'où $S_{\mathbb{R}^2} = \emptyset$

Exercice 7

1) a) (S) : $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 5x = 5 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x = 1 \\ 2 + y = 5 \end{cases}$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \text{ d'où } S_{\mathbb{R}^2} = \{(1, 3)\}$$

b) (S') : $\begin{cases} 3|x-3| - |y-2| = 0 \\ 2|x-3| + |y-2| = 5 \end{cases}$

on pose $|x-3| = X$ et $|y-2| = Y$ le système S' est équivalent à :

$$\begin{cases} 3X - Y = 0 \\ 2X + Y = 5 \end{cases} \quad \text{d'après a) on a } \begin{cases} X = 1 \\ Y = 3 \end{cases} \quad \text{d'où}$$

$$\begin{cases} |x-3|=1 \\ |y-2|=3 \end{cases} \quad \text{équivaut à } \begin{cases} x-3=1 \text{ ou } x-3=-1 \\ y-2=3 \text{ ou } y-2=-3 \end{cases} \quad \text{équivaut à } \begin{cases} x=4 \text{ ou } x=2 \\ y=5 \text{ ou } y=-1 \end{cases}$$

$$\text{d'où } S_{\mathbb{R}^2} = \{(4,5); (4,-1); (2,5); (2,-1)\}$$

$$2) \begin{cases} (3x-y)(x-y)=0 \\ 2x+y=5 \end{cases} \quad \text{équivaut à } \begin{cases} 3x-y=0 \text{ ou } x-y=0 \\ 2x+y=5 \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } \left(\begin{cases} 3x-y=0 \\ 2x+y=5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x-y=0 \\ 2x+y=5 \end{cases} \right)$$

$$\text{équivaut } \left(\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=y \\ 3x=5 \end{cases} \right) \quad \text{équivaut à } \left(\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=y \\ x=\frac{5}{3} \end{cases} \right),$$

$$S_{\mathbb{R}^2} = \left\{ (1,3); \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3} \right) \right\}$$

Exercice 8

x représente le prix d'un spectacle au tarif A et y représente le prix d'un spectacle au tarif B.

- L'équation $x + 3y = 48$ est une traduction mathématique (et même algébrique) du fait que Allia paie 48 dinars pour 1 spectacle au tarif A et 3 spectacles au tarif B.
- L'équation $2x + y = 41$ est une traduction mathématique du fait que Mohamed paie 41 dinars pour 2 spectacles au tarif A et 1 spectacle au tarif B.

$$\begin{cases} x + 3y = 48 \\ 2x + y = 41 \end{cases} \quad \text{si on multiplie la seconde équation par } -3 \text{ pour éliminer les } y,$$

$$\text{on obtient : } \begin{cases} x + 3y = 48 \\ -6x - 3y = -123 \end{cases}$$

En ajoutant membre à membre les deux équations on obtient :

$$-5x = -75 \text{ et } x = \frac{75}{5} = 15. \quad \text{Par suite } y = 41 - 30 = 11.$$

Le prix d'un spectacle au tarif A est de 15 dinars et le prix d'un spectacle au tarif B est de 11 dinars.

Exercice 9

$$1) \begin{cases} x + 2y = 165 \\ 3x + y = 195 \end{cases} \quad \text{signifie } \begin{cases} x = 165 - 2y \\ 3x + y = 195 \end{cases} \quad \text{équivaut à } \begin{cases} x = 165 - 2y \\ 3x + y = 195 \end{cases}$$

$$\text{équivalent à } \begin{cases} x = 165 - 2y \\ 495 - 6y + y = 195 \end{cases} \text{ équivalent à } \begin{cases} x = 165 - 2y \\ -5y = -300 \end{cases}$$

$$\text{équivalent à } \begin{cases} x = 165 - 120 \\ y = 60 \end{cases} \text{ équivalent à } \begin{cases} x = 45 \\ y = 60 \end{cases}$$

2) Soit x la consommation en watts d'un néon et y la consommation d'une lampe.

$$\begin{cases} x + 2y = 165 \\ 6x + 2y = 390 \end{cases} \text{ équivalent à } \begin{cases} x + 2y = 165 \\ 3x + y = 195 \end{cases}$$

donc on reconnaît le système 1)

donc un néon consomme 45 watts, et la lampe 60 watts.

Exercice 10

Soit x le nombre de timbres à 250 et y le nombre de timbres à 220 millimes.

$$\begin{cases} x + y = 22 \\ 250x + 220y = 5290 \end{cases} \text{ équivalent à } \begin{cases} x + y = 22 \\ 25x + 22y = 529 \end{cases} \text{ équivalent à}$$

$$\begin{cases} x = 22 - y \\ 25(22 - y) + 22y = 529 \end{cases} \text{ équivalent à } \begin{cases} x = 22 - y \\ 550 - 3y = 529 \end{cases} \text{ équivalent à } \begin{cases} x = 22 - y \\ -3y = -21 \end{cases}$$

$$\text{équivalent à } \begin{cases} x = 15 \\ y = 7 \end{cases}$$

La secrétaire a acheté 15 timbres à 250 mil et 7 timbres à 220 mil

Devoir de contrôle N° 3 - 1

Exercice 1

Résoudre dans \mathbb{R} , les équations suivantes

1. $(1 - 2x)^2 - 9(2x + 3)^2 = 0$.

2. $8x^3 - 3\sqrt{3} = 2x\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2x)$

3. $2|1 - x^2| = 9 - |x^2 - 1|$.

Exercice 2

1. Résoudre dans \mathbb{R} : $(3x + 5)(-2x + 1) < 0$; $-2 < 3x + 1 \leq 7$

2. Résoudre dans \mathbb{R} : $|2x - 1| - 3x + 1 = 0$; $|5x - 2| - |3 - x| = 1$

Exercice 3

Soit ABCD un rectangle tel que $AB = 7$ et $BC = 5$, l'unité étant le centimètre. Soit les points E, F, G et H sont définis par

$$\overrightarrow{AE} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CG} = \frac{4}{7}\overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{DH} = \frac{2}{5}\overrightarrow{DA}.$$

1. Justifier que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est un repère du plan.
2. Quelles sont les coordonnées du point B dans ce repère.
3. Exprimer le vecteur \overrightarrow{AG} en fonction de des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD} .
4. Dédire les coordonnées du point G
5. Quelles sont les coordonnées des points E, F et H.
6. Démontrer que le quadrilatère EFGH est parallélogramme.

Devoir de contrôle N° 3 - 2

Exercice 1

1. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

- $(2x+3)(x+3) = (x-5)(2x-5)$ • $(5x+1)(x-1) + x(15x+2) = 20x(x-1)$
- $||x|-1| = 3$ • $|3|x|-5| = x+1$

2. Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes.

- $(2-x)(x-1) + 4x - 8 < 2x(x-2)$ • $|x^2-1| \leq |7-x^2|$

Exercice 2

Soit f la fonction linéaire tel que $f(2) = -3$.

1. Trouver le coefficient a de f
2. Déterminer les images de 2 , $\frac{1}{3}$ et -1 par f
3. Quelles sont les antécédents de 2 , $\frac{1}{3}$ et -1 par
4. Tracer la droite de représentation graphique de f .

Exercice 3

A, B et C sont trois points non alignés. Soit J le milieu du segment $[AC]$

1. Construire les points M et N tels que : $\vec{AM} = 2\vec{AB} - \vec{AC}$ et $\vec{BN} = \frac{1}{2}\vec{AC}$
2. Montrer que $2\vec{MB} - \vec{MC} = \vec{0}$
3. Montrer que les droites (AM) et (CN) sont parallèles
4. Soit G le point défini par : $\vec{AG} + 5\vec{GB} + \vec{CG} = \vec{0}$
 - a) Exprimer \vec{GB} à l'aide de \vec{BA} et \vec{BC} .
 - b) Montrer que les points J, G et B sont alignés

Corrigé du devoir de contrôle N°3 - 1

Exercice 1

1. $(1-2x)^2 - 9(2x+3)^2 = 0$ équivaut à $(2x-1)^2 - (6x+9)^2 = 0$ équivaut à $(2x-1+6x+9)(2x-1-6x-9) = 0$ équivaut à $(8x+8)(-4x-10) = 0$ équivaut à $x = -1$ où $x = -\frac{5}{2}$, donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{5}{2}, -1\right\}$.
2. $8x^3 - 3\sqrt{3} = 2x\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2x)$ équivaut à $(2x)^3 - (\sqrt{3})^2 = 2x\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2x)$ équivaut à $(2x - \sqrt{3})(4x^2 + 2\sqrt{3}x + 3) + 2x\sqrt{3}(2x - \sqrt{3}) = 0$ équivaut à $(2x - \sqrt{3})(4x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 + 2x\sqrt{3}) = 0$ équivaut à $(2x - \sqrt{3})(2x + \sqrt{3})^2 = 0$ donne $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ où $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.
3. $2|1-x^2| = 9 - |x^2-1|$ équivaut à $2|1-x^2| + |x^2-1| = 9$ équivaut à $|x^2-1| = 3$ donc $x^2-1=3$ ou $x^2-1=-3$ équivaut à $x^2=4$ ou $x^2=-2$ impossible $x = -2$ ou $x = 2$ d'où $S_{\mathbb{R}} = \{-2, 2\}$.

Exercice 2

1. $(3x+5)(-2x+1) < 0$.

- $3x+5=0$ équivaut à $x = -\frac{5}{3}$
- $-2x+1=0$ équivaut à $x = \frac{1}{2}$.

x	$-\infty$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$3x + 5$	$-$	0	$+$	$+$
$-2x + 1$	$+$	$+$	0	$-$
$(3x + 5)(-2x + 1)$	$-$	0	$+$	$-$

Donc $S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty, -\frac{5}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

2. $-2 < 3x + 1 \leq 7$ équivaut à $-2 - 1 < 2x \leq 7 - 1$ équivaut à $-3 < 2x \leq 6$

équivaut à $-\frac{3}{2} < x \leq 3$

donc $S_{\mathbb{R}} = \left] -\frac{3}{2}, 3 \right]$

3. $|2x - 1| - 3x + 1 = 0$ équivaut à $|2x - 1| = 3x - 1$ équivaut à

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 2x - 1 = 3x - 1 \text{ où } 2x - 1 = -3x + 1 \end{cases} \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x = 0 \text{ ou } x = \frac{2}{5} \end{cases}$$

or $0 < \frac{1}{3}$ donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{2}{5} \right\}$.

- $|5x - 2| - |3 - x| = 1$. On dresse un tableau d'expression de $|5x - 2| - |3 - x|$ pour rendre l'équation sans valeurs absolues.

x	$-\infty$	$\frac{2}{5}$	3	$+\infty$
$ 5x - 2 $	$-5x + 2$	0	$5x - 2$	$5x - 2$
$ 3 - x $	$-x + 3$	$-x + 3$	0	$x - 3$
$ 5x - 2 - 3 - x $	$-4x - 1$	$6x - 5$	$4x + 1$	

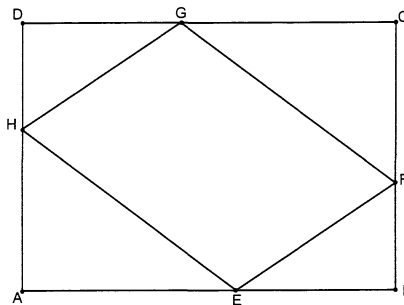
- Sur l'intervalle $\left] -\infty, \frac{2}{5} \right]$ l'équation se ramène à $-4x - 1 = 1$ donc $-4x = 2$ équivaut à $x = -\frac{1}{2} \in \left] -\infty, \frac{2}{5} \right]$
- Sur l'intervalle $\left[\frac{2}{5}, 3 \right]$ l'équation se ramène à $6x - 5 = 1$ donc $x = 1$
- Sur l'intervalle $[3, +\infty[$ l'équation se ramène à $4x + 1 = 1$ donc $x = 0$, or $0 \notin [3, +\infty[$. donc l'ensemble des solutions de l'équation $|5x - 2| - |3 - x| = 1$ est $\left\{ -\frac{1}{2}, 1 \right\}$.

Exercice 3

1. Les points A, B et D sont non alignés donc les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD} sont non colinéaires d'où le triplet $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est un repère.
2. $\overrightarrow{AB} = 1.\overrightarrow{AB} + 0.\overrightarrow{AD}$ donc $B(1,0)$.
3. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$ or on a :
 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$ donc

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \frac{4}{7}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

4. De la relation $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ on déduit que $G\left(\frac{3}{7}, 1\right)$.
5. On a : $\overrightarrow{AE} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB}$ donc $E\left(\frac{4}{7}, 0\right)$. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$ donc
 $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$ d'où $F\left(1, \frac{2}{5}\right)$. $\overrightarrow{DH} = \frac{2}{5}\overrightarrow{DA}$ donc $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$ et par suite
 $H\left(0, \frac{3}{5}\right)$.
6. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$ donc $\overrightarrow{EF} = -\frac{4}{7}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AD} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$
 $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AG}$. Donc $\overrightarrow{HG} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et par suite
 $\overrightarrow{HG} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$ ce que donne que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ donc EFGH est
 parallélogramme.



Corrigé du devoir de contrôle N° 3 – 2

Exercice 1

1. $(2x+3)(x+3) = (x-5)(2x-5)$ équivaut à $2x^2+9x+9 = 2x^2-15x+25$
équivaut à $9x+15x = 25-9$ équivaut à $24x = 16$ équivaut à $x = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$

donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$

• L'équation (E) est équivalente $(5x+1)(x-1) + x(15x+2) = 20x(x-1)$
équivaut à $5x^2-4x-1+15x^2+2x = 20x^2-20x$ équivaut à $18x = 1$

équivaut à $x = \frac{1}{18}$ donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{1}{18} \right\}$

• $||x|-1| = 3$ équivaut à $|x|-1 = 3$ ou $|x|-1 = -3$

équivaut à $|x| = 4$ ou $|x| = -2$ (impossible)

l'équation $|x| = 4$ donne $x = 4$ ou $x = -4$ donc $S_{\mathbb{R}} = \{-4, 4\}$.

• $|3|x|-5| = x+1$ la valeur absolue est toujours positive donc il est nécessaire que $x+1$ doit être positif donc $x \geq -1$.

L'équation se ramène à $3|x| - 5 = x+1$ ou $3|x| - 5 = -x-1$ donc

$3|x| = x+6$ ou $3|x| = -x+4$.

* Pour l'équation $3|x| = x+6$ on a :

$$3|x| = x+6 \text{ or } x \geq -1 \text{ donc } x+6 > 0 \text{ donne } \begin{cases} x \in [0, +\infty[\\ 3x = x+6 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \in [-1, 0] \\ 3x = -x-6 \end{cases}$$

donc $x = 3$ ou $x = -\frac{3}{2} \notin [0, -1]$ d'où $S_1 = \{3\}$

* Pour l'équation $3|x| = -x+4$ on a :

$3|x| = -x+4$ équivaut à $x \leq 4$ et $3x = -x+4$ ou $3x = x-4$ donne
 $4x = 4$ donc $x = 1$ ou $2x = -4$ donne $x = -2$ (à rejeter) d'où $S_2 = \{1\}$

Conclusion : $|3|x|-5| = x+1$, $S_{\mathbb{R}} = S_1 \cup S_2 = \{1, 3\}$.

2. $(2-x)(x-1)+4x-8 < 2x(x-2)$ équivaut à $(x-2)(-x+1+4-2x) < 0$

équivaut à $(x-2)(-3x+5) < 0$ équivaut à $(x-2)(3x-5) > 0$

x	$-\infty$	$\frac{5}{3}$	2	$+\infty$
$3x-5$	-	0	+	+
$x-2$	-	-	0	+
$(x-2)(3x-5)$	+	0	-	+

donc $S_{\mathbb{R}} = \left] -\infty, \frac{5}{3} \right[\cup] 2, +\infty [$

• $|x^2-1| \leq |7-x^2|$ équivaut à $(x^2-1)^2 \leq (7-x^2)^2$ équivaut à

$(x^2-1)^2 - (7-x^2)^2 < 0$ équivaut à $(x^2-1+7-x^2)(x^2-1-7+x^2)$

équivaut à $6(2x^2-8) < 0$ équivaut à $x^2-4 < 0$ équivaut à $(x-2)(x+2) < 0$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x-2$	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+
$(x-2)(x+2)$	+	0	-	+

Donc $S_{\mathbb{R}} =]-2, 2[$

Exercice 2

1. f est une fonction linéaire donc $f(x) = ax$. On a : $f(2) = -3$ d'où $2a = -3$

ce qui donne $a = -\frac{3}{2}$ donc $f(x) = -\frac{3}{2}x$.

2. Les images respectives de 2, $\frac{1}{3}$ et -1 par f sont respectivement -3 ;

$f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$ et $f(-1) = \left(-\frac{3}{2}\right) \times (-1) = \frac{3}{2}$.

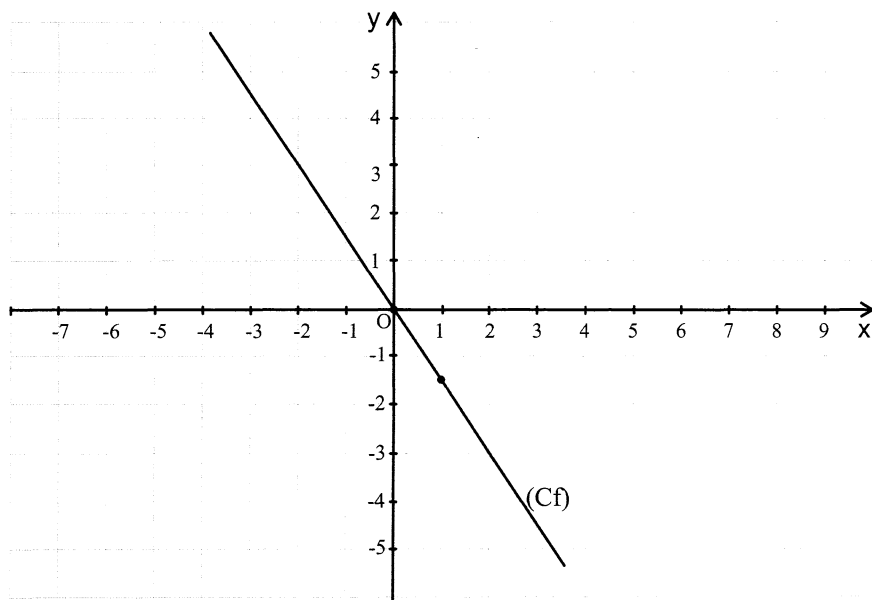
3. Si x est l'antécédent de 2 par f alors $f(x) = 2$ donc $-\frac{3}{2}x = 2$ équivaut à $x = -\frac{4}{3}$.

Si x est l'antécédent de $\frac{1}{3}$ par f alors $f(x) = \frac{1}{3}$ donc $-\frac{3}{2}x = \frac{1}{3}$ équivaut $x = -\frac{2}{9}$.

Si x est l'antécédent de -1 par f alors $f(x) = -1$ donc $-\frac{2}{3}x = -1$ équivaut à $x = \frac{3}{2}$.

4. La courbe de f est une droite qui passe par l'origine du repère et

par le point $A\left(1, -\frac{3}{2}\right)$.



Exercice 3

1. M est le point tel que :

$$\vec{AM} = 2\vec{AB} - \vec{AC} . \text{ On}$$

construit les points M_1 et M_2

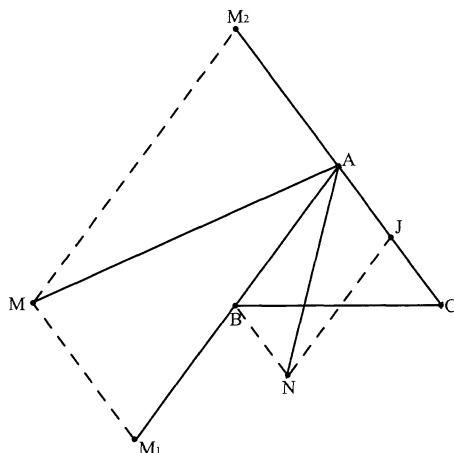
$$\text{tel que } \vec{AM_1} = 2\vec{AB} \text{ et}$$

$\vec{AM_2} = -\vec{AC}$. Le point M est
le quatrième sommet du

parallélogramme

AM_1MM_2 . Puis on construit

le point N tel que $\vec{BN} = \vec{AJ}$.



2. On applique la relation de Chasles dans l'expression $2\vec{MB} - \vec{MC}$. On aura donc $2\vec{MB} - \vec{MC} = 2\vec{MA} + 2\vec{AB} - \vec{MA} - \vec{AC} = \vec{MA} + (2\vec{AB} - \vec{AC})$ donc

$$2\vec{MB} - \vec{MC} = \vec{MA} + \vec{AM} = \vec{0} .$$

3. On a : $\vec{AM} = 2\vec{AB} - \vec{AC}$ et $\vec{CN} = \vec{CA} + \vec{AB} + \vec{BN} = -\vec{AC} + \vec{AB} + \vec{AJ}$ donc

$$\vec{CN} = -\vec{AC} + \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} = \vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC} \text{ donc } \vec{CN} = \frac{1}{2}\vec{AM} \text{ d'où les droites (AM) et (CN) sont parallèles.}$$

4. Soit G le point défini par : $\vec{AG} + 5\vec{GB} + \vec{CG} = \vec{0}$

- a) De la relation $\vec{AG} + 5\vec{GB} + \vec{CG} = \vec{0}$ et on applique la relation de Chasles, on aura : $\vec{AB} + \vec{BG} + 5\vec{GB} + \vec{CB} + \vec{BG} = \vec{0}$ donc $3\vec{GB} = \vec{BA} + \vec{BC}$ c'est-à-dire

$$\vec{GB} = \frac{1}{3}(\vec{BA} + \vec{BC}) .$$

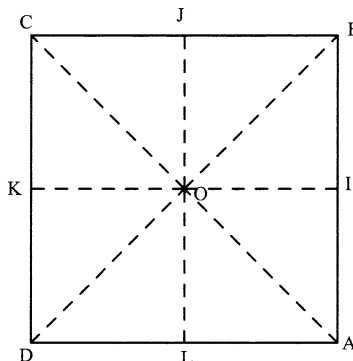
- b) On a : $\vec{BA} + \vec{BC} = 2\vec{BJ}$ et d'après la question a. on déduit que $\vec{GB} = \frac{2}{3}\vec{BJ}$
d'où les points G , B et J sont alignés.

Quart de tour

I. Activités pour bien assimiler mon cours

Activité 1 (Définition d'un Quart. de tour)

Soit ABCD un carré de centre O et I, J, K, L les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA] du carré. Préciser les images des points O, A, B, C, D, I, J, K, et L par les quarts de tour direct et indirect de centre O.



Le quart de tour direct de centre O est l'application du plan P vers lui-même qui à chaque point

$$M \mapsto M' \text{ tel que : } \begin{cases} OM = OM' \\ \widehat{MOM'} = 90^\circ \end{cases}$$

Le centre du quart de tour est l'unique point invariant.

Activité 2 (Construction du centre d'un quart de tour)

Etant donné deux point A et A' du plan P.

On se propose de construire le centre O du quart de tour qui transforme A en A'.

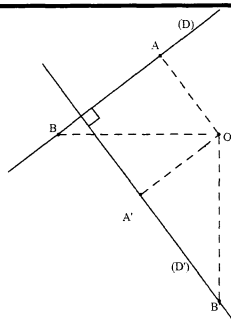
1. Quel est l'ensemble des points M équidistants des points A et A'.
2. Soit (C) le cercle de diamètre [AA']. Et M un point de (C). Quelle est la nature du triangle AA'M.
3. déduire une construction du centre O du quart de tour direct et O' centre du quart de tour indirect qui transforme A en A'.

Activité 3 (Image d'une droite par un quart de tour)

Soit O un point et D une droite. Construire l'image de la droite D par le quart de tour de centre O dans chacun des cas suivants

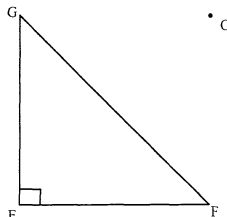
- O est un point de D.
- O n'appartient pas à D.

L'image d'une droite par un quart de tour est une droite qui lui est perpendiculaire
Si le centre du quart de tour appartient à (D) alors l'image de (D) est une droite perpendiculaire à (D) en O.



Activité 4 (Image d'un segment par un quart de tour)

La figure ci-contre est un triangle rectangle et isocèle en E et O un point du plan.



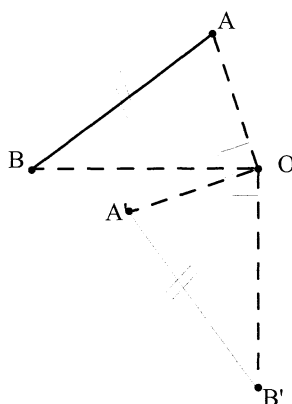
1. Quelle est l'image du point F par le quart de tour direct de centre E
2. Déduire l'image du segment [EF] par le quart de tour de centre E.
3. Soit O le point tel que EFOG est un carré.

a. Tracer la demi-droite [Ox) tel que $\widehat{EOx} = 45^\circ$.

On note par E' l'image de E par la symétrie axiale d'axe (Ox). Quel est l'image du segment [EF] par le quart de tour de centre O.

L'image d'un segment par un quart de tour est un segment qui lui est isométrique.
(Les deux triangles OAB et OA'B' sont isométriques).

On pourra démontrer que les triangles OAB et OA'B' sont isométriques.



Activité 5 (Image d'un cercle par un quart de tour)

Etant donnés deux points distincts I, O. Soit M un point variable dans le plan.

1. Construire les points O' et M' images respectives des points O et M par le quart de tour direct de centre I.
2. Montrer que $\widehat{OIM} = \widehat{O'IM'}$.

- Déduire que les triangles IOM et IO'M' sont isométriques. Comparer alors OM et OM'.
- Quel est l'ensemble décrit par M' lorsque M varie sur un cercle de centre O et de rayon r.

Soit un cercle (\mathcal{C}) de centre O et de rayon r . O' L'image de O par le quart de tour de centre un point I du plan P. Alors l'image du cercle (\mathcal{C}) par le quart de tour de centre I est le cercle (\mathcal{C}') de centre O' et de même rayon r.

II. Corrigés des activités (bien assimiler mon cours)

Activité 1

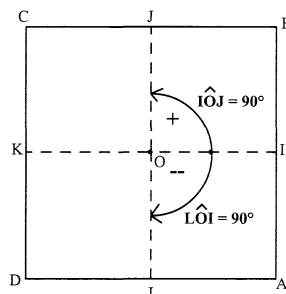
Si on désigne par J^+ le quart de tour direct et J^- le quart de tour indirect. Puisque O est le centre de J^+ et de J^- alors $J^+(O) = O$ et $J^-(O) = O$.

- On a : $\begin{cases} OI = OJ \\ \widehat{IOJ} = 90^\circ \end{cases}$ donc $J^+(I) = J$

et on a : $\begin{cases} OL = OI \\ \widehat{LOI} = 90^\circ \end{cases}$ donc $J^-(I) = L$

- De la même façon on démontre que :

$J^+(B) = C$, $J^+(J) = K$, $J^+(C) = D$, $J^+(K) = L$, $J^+(L) = I$, $J^+(A) = B$, $J^+(D) = A$.
 $J^-(A) = D$, $J^-(L) = K$, $J^-(D) = C$, $J^-(K) = J$, $J^-(C) = B$, $J^-(J) = I$, $J^-(B) = A$.



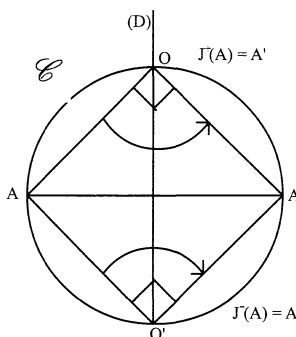
Activité 2

Etant donné deux point A et A' du plan P. On se propose de construire le centre O du quart de tour qui transforme A en A'.

- L'ensemble des point M équidistants des points A et A' est la droite (D) médiatrice du segment [AA']
- (\mathcal{C}) est le cercle de diamètre [AA'] et M un point de (\mathcal{C}). donc le triangle AMA' est rectangle en M
- A' image de A par un quart de tour direct

de centre O donc $\begin{cases} OA = OA' \\ \widehat{AOA'} = 90^\circ \end{cases}$

donc O est un point de l'intersection de (D) et de (C). Deux point O et O' vérifie la condition précédente : O est le centre du quart de tour direct J^+ et O' centre du quart de tour indirect J^- .



Activité 3

- O est un point de D donc l'image de D par le quart de tour direct ou indirect est une droite D' perpendiculaire à D en O.
- O n'appartient pas à D. On considère un point A de D puis on construit son image A' par le quart de tour direct ou indirect de centre O. La droite D' perpendiculaire à D passant par A' est donc image de D par J⁻ ou par J⁺.

Activité 4

1. Le triangle EFG est rectangle et isocèle en E donc :

$$\begin{cases} EF = EG \\ \widehat{FEG} = 90^\circ \end{cases} \text{ donc G est}$$

l'image de F par J⁺ le quart de tour direct de centre E.

2. d'après la question 1. On a : J⁺(E) = E et J⁺(F) = G donc le segment [EG] est l'image de [EF] par J⁺

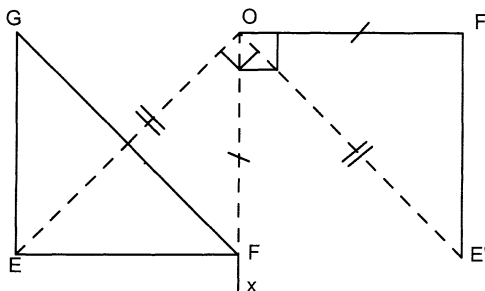
3. EFOG est un carré.

a) $\widehat{EOx} = 45^\circ$ donc $[Ox) = [OF)$.

b) E' l'image de E par la symétrie axiale d'axe (Ox) donc d'axe (OF) ce qui donne (OF) est la médiatrice du segment [EE'] donc

$$\begin{cases} OE = OE' \\ \widehat{EOE'} = 90^\circ \end{cases} \text{ d'où E' est l'image de E par le quart de tour de centre O.}$$

c) Si on désigne par F' le point tel que $O = G * F'$ on aura F' image de F par le quart de tour direct de centre O. Ce qui donne [E'F'] est l'image du segment [EF].



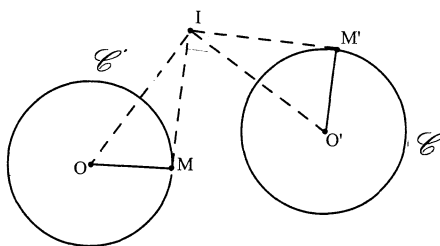
Activité 5

I et O sont deux points donnés du plan P

1. On désigne par J⁺ le quart de tour direct de centre I. O' et M' les points tel que

$$\begin{cases} IO = IO' \\ \widehat{OIO'} = 90^\circ \end{cases} \text{ et } \begin{cases} IM = IM' \\ \widehat{MIM'} = 90^\circ \end{cases}$$

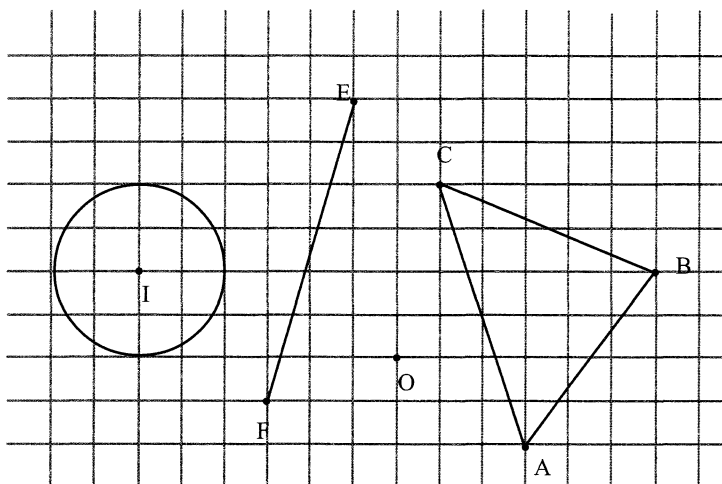
d'où la construction de O' et M'



2. On a : $\widehat{OIO'} = \widehat{MIM'}$ signifie que $\widehat{OIM} + \widehat{MIO'} = \widehat{MIO'} + \widehat{O'IM'}$ donne
 $\widehat{OIM} = \widehat{O'IM'}$
 3. On a : $IO = IO'$, $IM = IM$ et $\widehat{OIM} = \widehat{O'IM'}$ donc les deux triangles IOM et $IO'M'$ sont isométriques. Les côtés $[OM]$ et $[O'M']$ sont homologues donc
 $OM = O'M'$
- M est un point du cercle de centre O et de rayon r donc $OM = r$ et puisque $O'M' = OM$ donc $O'M' = r$ d'où M décrit le cercle \mathcal{C}' de centre O' et de même rayon r .

III. Exercices (je maîtrise mes connaissances)

Exercice 1

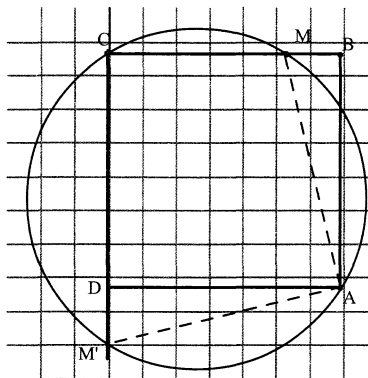


Reproduire la figure sur papier. Utiliser "au mieux" le quadrillage pour construire les images du cercle, du segment et du triangle par le quart de tour indirect de centre O

Exercice 2

On considère un carré ABCD , Tel que la figure ci-contre. M un point du segment $[BC]$ distinct du point C. Le cercle (\mathcal{C}) circonscrit au triangle AMC recoupe la droite (CD) en M' .

1. Montrer que $[MM']$ est un diamètre de (\mathcal{C}) .
2. Montrer que le triangle MAM' est isocèle rectangle en A
3. Montrer que M'est l'image de M par le quart de tour direct de centre A.
4. Dédire de ce qui précède que :
 $DM' = DM$.



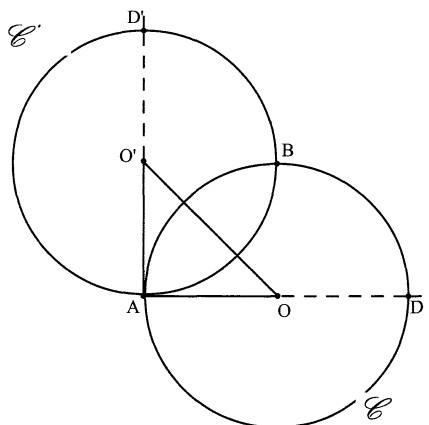
Exercice 3

EFGH un carré de centre O et J^+ le quart de tour de centre O qui transforme E en F.

- Quelles sont les images de F, G, H par J^+ .
- Soit M un point du segment [EF] tel que $EM = \frac{3}{4}EF$ et $N = J^+(M)$.
 - Montrer que N est un point de [FG]. Que peut on dire des droites (OM) et (ON).
 - Montrer que $FN = \frac{3}{4}FG$
- Le cercle (\mathcal{C}) de centre O et passant par M coupe les segments [EF], [FG] et [GH] et [HE] respectivement et dans cet ordre en M_1 , M, N_1 , N, P_1 , P, et Q_1 , Q.
 - Quelles sont les images de (\mathcal{C}) et [FG] par J^+ .
 - Déduire que les point P et P_1 sont les images respectives de N et N_1 par J^+
 - Quel est la nature des quadrilatères MNPQ et $M_1N_1P_1Q_1$.

Exercice 4

La figure ci-contre est formée par un triangle $OA'O'$ isocèle rectangle en A, deux cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}' passant par A et de centres respectifs O et O' se recoupent en B. D et D' étant les points respectivement diamétralement opposés à A sur les cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}' .



- Quelles sont les images respectives des points O et D par J^+ le quart de tour direct de centre A.
- Déduire que \mathcal{C}' est l'image de \mathcal{C} par J^+ .
- Calculer \widehat{ABD} et $\widehat{ABD'}$
déduire que les points D, B et D' sont alignés.
 - Quel est la nature du quadrilatère $OO'D'B$.
- Tracer la droite Δ image de (DD') par J^+
 - La parallèle à (AB) passant par D' recoupe \mathcal{C}' en B' . Montrer que B' est l'image de B par J^+

Exercice 5

On considère dans le plan P un parallélogramme $ABCD$ de sens direct. On se propose de construire un carré $PQRS$ tel que P , Q , R et S appartiennent respectivement aux droites (AB) , (BC) , (CD) et (DA) soit O le centre du carré.

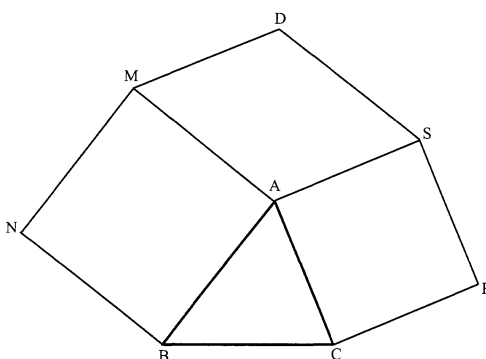
- Montrer que les droites (AD) et (DC) sont les images respectives des droites (BC) et (AB) par la symétrie centrale de centre O . Dédire que O est le centre du parallélogramme $ABCD$.
- Soit la droite Δ image de (AB) par le quart de tour direct J^+ de centre O
 - Quel est l'image de P par J^+
 - Dédire que Q est un point commun des droites (BC) et Δ
- Construire la droite Δ puis les points P , Q , R et S

Exercice 6

Dans le plan P on considère un triangle ABC . On construit extérieurement au triangle les carrés $ACRS$ et $BAMN$ puis le parallélogramme $MASD$ dont on notera I le centre.

Soit J^+ le quart de tour direct de centre A .

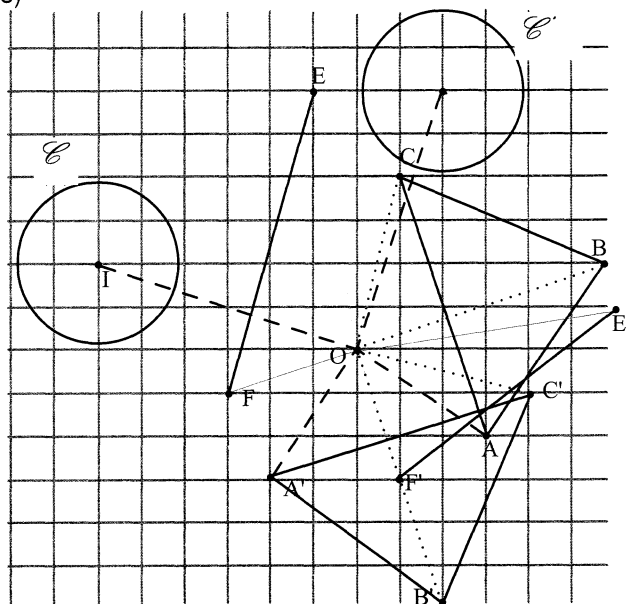
- Déterminer les images respectives des points M et C par J^+ .
- On note par S' image de S par J^+ . Montrer que $A = C * S'$
- On note par I' l'image de I par J^+ . Montrer que $I' = B * S'$. Dédire de ce qui précède que les droites (AD) et (BC) sont perpendiculaires et que $AD = BC$.



IV. Corrigés des exercices (je maîtrise mes connaissances)

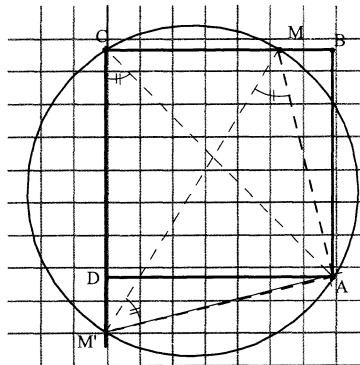
Exercice 1

Si on désigne par $[AB]$ le segment, EFG le triangle et le cercle \mathcal{C} de centre I .
On construit leurs images respectives $[A'B']$, $E'F'G'$ et (C') de centre I' (figure ci-dessous)



Exercice 2

On considère un carré $ABCD$, tel que la figure ci-contre. M un point du segment $[BC]$ distinct du point C . Le cercle \mathcal{C} circonscrit au triangle AMC recoupe la droite (CD) en M' .



1. M' est un point du cercle \mathcal{C} , le triangle $MM'C$ est rectangle en C , inscrit dans \mathcal{C} donc $[MM']$ est un diamètre de ce cercle.
2. Puisque $[MM']$ est un diamètre de \mathcal{C} et A un point de ce cercle donc le triangle $MM'A$ est rectangle en A d'autre part on a :

$\widehat{AMM'} = \widehat{ACM'}$ (deux angles inscrits interceptent le même arc $\widehat{AM'}$), or

$\widehat{ACM'} = \widehat{ACD} = 45^\circ$ d'où $\widehat{AMM'} = 45^\circ$ donc le triangle AMM' est isocèle en A .
d'où $AM = AM'$

3. De ce qui précède on a : $\begin{cases} AM = AM' \\ \widehat{MAM} = 90^\circ \end{cases}$ donc M' est l'image de M par le quart de tour direct de centre A .
4. On montre que les triangles AMB et $AM'D$ sont isométriques ($AM = AM'$, $AB = AD$ et $\widehat{BAM} = \widehat{DAM'}$) les côtés $[BM]$ et $[DM']$ sont homologues donc $BM = DM'$.

Exercice 3

EFGH un carré de centre O et J^+ le quart de tour de centre O qui transforme E en F .

1. On a EFGH est un carré de centre

$$O \text{ donc } \begin{cases} OF = OG \\ \widehat{FOG} = 45^\circ \end{cases} \text{ donc } J^+(F) = G$$

de la même façon on montre que $J^+(G) = H$ et $J^+(H) = E$.

2. Soit M un point du segment $[EF]$ tel

$$\text{que } EM = \frac{3}{4}EF \text{ et } N = J^+(M).$$

- a) D'après la question 1 on a : $J^+([EF]) = [FG]$ puisque M un point de $[EF]$ donc son image N par J^+ est un point de $[FG]$.
De la relation $J^+(M) = N$ on déduit que

$\widehat{MON} = 90^\circ$ donc les droites (OM) et (ON) sont perpendiculaires.

- b) On montre que les triangles OMF et ONG sont isométriques.

On a : $\widehat{MON} = \widehat{FOG}$ donc $\widehat{MOF} + \widehat{FON} = \widehat{FON} + \widehat{NOG}$ ce que donne $\widehat{MOF} = \widehat{NOG}$ et on a : $OM = ON$ et $OF = OG$ donc triangles OMF et ONG sont isométriques les côtés $[MF]$ et $[NG]$ sont homologues

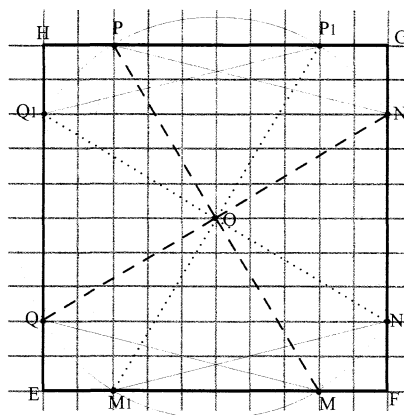
$$\text{donc } MF = NG \text{ d'où } FN = \frac{3}{4}FG.$$

3. Le cercle \mathcal{C} de centre O et passant par M coupe les segments $[HG]$ et $[EH]$ respectivement en P et Q .

- a) Puisque O est le centre de \mathcal{C} donc l'image \mathcal{C} par J^+ est \mathcal{C} lui même. On a : $J^+(F) = G$ et $J^+(G) = H$ donc $J^+([FG]) = [GH]$.

- b) On a : $\{N_1, N\} = \mathcal{C} \cap [FG]$ donc $J^+(\{N_1, N\}) = J^+(C) \cap J^+[FG]$ donc $J^+(\{N_1, N\}) = \mathcal{C} \cap [GH] = \{P_1, P\}$ donc $J^+(N) = P$ et $J^+(N_1) = P_1$.

- c) De la même façon on montre que $J^+(P) = Q$, $J^+(P_1) = Q_1$, $J^+(Q) = M$, $J^+(Q_1) = M_1$ ce qui donne les quadrilatères $MNPQ$ et $M_1N_1P_1Q_1$ sont des carrés.



Exercice 4

1. Le triangle OAO' est isocèle rectangle en A donc $\begin{cases} AO = AO' \\ \widehat{OAO'} = 90^\circ \end{cases}$ donc

$$J^+(O) = O' \text{ et } \begin{cases} AD = AD' \\ \widehat{DAD'} = 90^\circ \end{cases} J^+(D) = D'$$

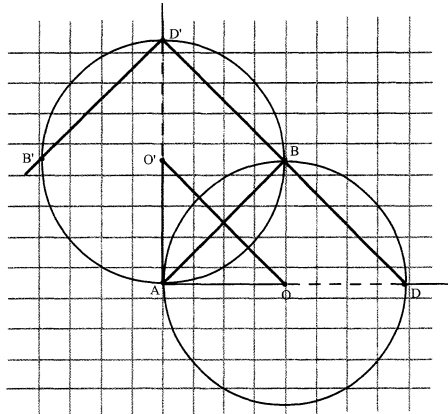
2. L'image du centre de \mathcal{C} par J^+ est le centre de \mathcal{C}' et de plus \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont de même rayon donc \mathcal{C}' est l'image de \mathcal{C} .

3. a) Calculer $\widehat{ABD} = 90^\circ$ car le cercle \mathcal{C} passe par B et de diamètre [AD] de même pour $\widehat{ABD'} = 90^\circ$ ce que donne

$\widehat{DBD'} = \widehat{DBA} + \widehat{ABD'} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ donc $\widehat{DBD'}$ est un angle plat d'où les points D, B et D' sont alignés.

- b) Dans le triangle DAD' on a :

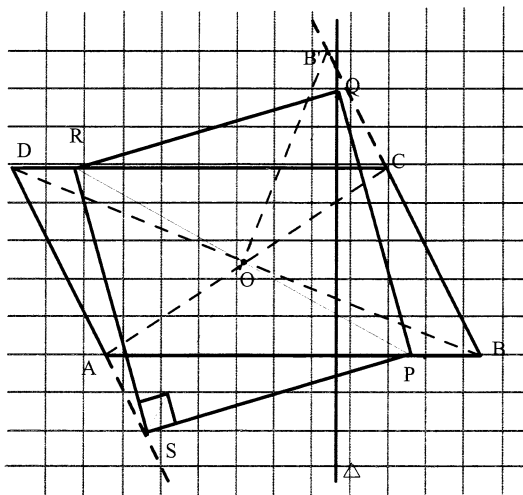
$O = A * D$ et $O' = A * D'$ donc
 $(OO') \parallel (DD')$ or on a : A et B
 sont deux points communs des
 deux cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}' donc
 $BO = BO'$ et $AO = AO'$ d'où
 (AB) est la médiatrice du
 segment $[OO']$ et par
 conséquent (AB) est
 perpendiculaire à (DD') et
 puisque ADD' isocèle en A
 donne $B = D * D'$ et par suite
 $OO' = BD'$ donc le quadrilatère
 $OO'D'B$ est parallélogramme.



5. a) On a : $J^+(D) = D'$ donc Δ l'image de (DD') par J^+ est la droite perpendiculaire à (DD') en D' d'où Δ est perpendiculaire à (DD') .
 b) Or (AB) est perpendiculaire à (DD') donc $\Delta \parallel (AB)$ d'où Δ recoupe (C') en B' . $B \in (DD') \cap (C)$ donc $J^+(B) \in J^+(DD') \cap J^+(C)$ ce que donne $J^+(B) \in \Delta \cap (C')$ or $\Delta \cap (C') = \{D', B'\}$ donc $J^+(B) = B'$

Exercice 5

1. L'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite qui lui est parallèle. PQRS est un carré de centre O donc $S_O(P) = R$ et $S_O(Q) = S$. Or P est un point du segment [AB] donc son image par S_O est un point de l'image de (AB) qui est parallèle à (AB). La droite (DC) est la parallèle à (AB) passant par R donc $S_O(AB) = (DC)$ de la même façon on montre que $S_O(BC) = (AD)$. [BD] est une diagonale du parallélogramme ABCD,

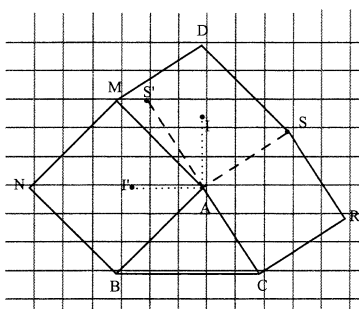


$\{B\} = (AB) \cap (BC)$ donc $S_O(\{B\}) = S_O((AB) \cap (BC)) = (DC) \cap (AD) = \{D\}$
donc $S_O(B) = D$ et par suite $O = B * D$ ce que donne que O le centre du parallélogramme ABCD.

2. Δ image de (AB) par le quart de tour direct J^+ de centre O
- On a : PQRS un carré de centre O donc $\begin{cases} OP = OQ \\ \widehat{POQ} = 90^\circ \end{cases}$ d'où $J^+(P) = Q$
 - P est un point de (AB) donc $J^+(P)$ est un point de Δ ce qui donne que le point Q est commun de (BC) et Δ .
3. Δ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par l'image de B. Donc on construit le point Q intersection de Δ et (BC), Le point R l'intersection de la perpendiculaire (OQ) en O avec (DC) de la même façon on construit S et P.

Exercice 6

1. AMNB est un carré donc $\begin{cases} AM = AB \\ \widehat{MAB} = 90^\circ \end{cases}$ donc $J^+(M) = B$ de même pour $J^+(C) = S$
2. On a : $J^+(C) = S$ donne $\begin{cases} AC = AS \\ \widehat{CAS} = 90^\circ \end{cases}$
- et $J^+(S) = S'$ donne $\begin{cases} AS = AS' \\ \widehat{SAS'} = 90^\circ \end{cases}$



or $\widehat{C\hat{A}S'} = \widehat{C\hat{A}S} + \widehat{S\hat{A}S'} = 180^\circ$

d'où les points C, A et S' sont alignés et puisque

$AC = AS$ et $AS = AS'$ donc $AC = AS'$ donc $A = C * S'$.

3. Le point B est l'image de M par J^+ et S' est l'image de S par J^+ donc $[BS']$ est l'image de $[MS]$ par J^+ , or $I = S * M$ donc l'image de I est un point du segment $[BS']$. Les triangles ASI et AS'I' sont isométriques donc $SI = S'I'$ de la même façon on montre que $IM = I'B$ ce que donne $S'I' = I'B$ donc $I' = B * S'$.

4. Dans le triangle BCS' on a : On a : $A = C * S'$ et $I' = B * S'$ donc $(AI') \parallel (BC)$ et puisque $(AI) \perp (AI')$ et $(AI) = (AD)$ donc $(AD) \perp (BC)$ (deux parallèles toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre).

D'autre part on a : $AI = \frac{1}{2}AD$ et $AI' = \frac{1}{2}BC$ or $AI = AI'$ donc

$$\frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC \text{ d'où } AD = BC.$$

Exploitation de l'information

I. Activités pour bien assimiler mon cours

Activité 1 (Population individu caractère)

Dans une classe de première année, les élèves ont répondu à un questionnaire les interrogeant sur le nombre de frères et sœurs dans leurs familles et leur âge. Les résultats du questionnaire sont représentés par les tableaux T_1 , T_2 .

Nombre de frères et sœurs	1	2	3	4	Plus que 4
Nombre d'observations	10	12	10	5	3

T_1 (Le nombre d'observations représente le nombre d'élèves dont le nombre de frères et sœurs dans leur familles est)

âge des frères et sœurs (an)	Moins de 5	[5,7[[7,10[[10,12[Plus que 12
Nombre d'observations	8	10	12	5	3

T_2 (Le nombre d'observations représente le nombre d'élèves dont leurs frères et sœurs ont l'âge....)

Sexe	Fille	Garçon
Nombre d'observations	23	15

T_3 (donne la répartition des élèves selon le sexe)

1. Pour toutes les séries statistiques T_1 , T_2 et T_3 Préciser la population, les individus.
2. Préciser les caractères et leurs types des trois séries T_1 , T_2 et T_3

- Etudier une série statistique à une variable consiste à étudier un aspect particulier des éléments d'un ensemble donné.
- L'ensemble étudié s'appelle la population et chaque élément de l'ensemble s'appelle individu.
- L'aspect étudié s'appelle la variable ou le caractère.
- Une variable (ou caractère) peut prendre des valeurs numériques ou modalités. Si un caractère est défini par un nombre, on dit qu'il est quantitatif.

Un caractère quantitatif discontinu ou (discret) lorsqu'il ne peut prendre qu'un nombre fini de valeur. Un caractère quantitatif continu lorsqu'il peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle de \mathbb{R}

- Lorsqu'un caractère ne peut pas être défini par un nombre (il n'est pas soumis à une mesure) on dit qu'il est qualitatif (on parle de modalités).

Activité 2 (Effectif Fréquence)

Le recensement général de la population tunisienne de 1998 a permis de répartir les tunisiens en trois groupes. Les jeunes (moins de 20 ans) , les adultes et le troisième âge (plus de 60 ans) . Les résultats sont groupés dans le tableau T₄

Valeur du caractère	Jeune	adulte	Troisième âge	Somme
Effectifs en millions	4,8	3,8	1,2	9,8
Fréquence				

Calculer la fréquence de chaque modalité puis déterminer en pourcentage les fréquences par modalité.

- Le nombre d'individu pour lesquels la variable prend une valeur donnée s'appelle l'effectif de cette valeur. On la note par n_i
- L'effectif total est la somme des effectifs de toutes les valeurs de la variable, c'est-à-dire le nombre d'individu de la population qu'on note N
- La fréquence d'une valeur est le quotient de l'effectif de cette valeur par l'effectif total qu'on note F_i , $F_i = \frac{n_i}{N}$

Activité 3 (Effectifs cumulés Fréquences cumulées)

Le tableau suivant T₅ donne les effectifs pour la variable âge

âge	17	16	15	14
Effectif	6	10	14	5

1. Compléter le tableau en calculant l'effectif cumulé croissant
2. Compléter le tableau en calculant l'effectif cumulé décroissant
3. Compléter le tableau en calculant la fréquence cumulée croissante
4. Compléter le tableau en calculant la fréquence cumulée décroissante

- Dans le cas d'une variable quantitative, on peut ordonner les différentes valeurs de la variable de la plus petite à la plus grande et additionner les effectifs successifs : On obtient les effectifs cumulés croissants. On note $E_k^{\nearrow} = \sum_{i \leq k} n_i$
- Si on ordonne les différentes valeurs de plus grande à la plus petite, on obtient l'effectif cumulé décroissant.
On note $E_k^{\searrow} = \sum_{i \geq k} n_i$
- Si on remplace les effectifs par les fréquences, on obtient les fréquences cumulées croissantes ou les fréquences cumulées décroissantes. On note $F_k^{\nearrow} = \sum_{i \leq k} f_i$ et $F_k^{\searrow} = \sum_{i \geq k} f_i$

Activité 4 (Représentation graphique Diagramme en bâtons)

La série suivante représentée par le tableau T_6

Valeur du caractère x_i	1	2	3	4	5	6	Total
Effectif n_i	1	5	2	4	3	1	16

Tracer le diagramme en bâtons de la série représenté par le tableau T_6

La représentation diagramme en bâtons s'adapte au cas général d'un caractère quantitatif discret. Désignons par x_1, x_2, \dots, x_i les valeurs du caractère avec $x_1 < x_2 < \dots < x_i$ et par n_1, n_2, \dots, n_i les effectifs correspondants. Le diagramme est un ensemble de segments dont les longueurs sont proportionnelles aux effectifs ou aux fréquences. Il est construit dans un plan rapporté à un repère orthogonal en portant, en abscisse les valeurs du caractère x_i et en ordonnée les effectifs n_i ou les fréquences (selon l'étude).

Activité 5 (Représentation graphique Diagramme à secteur circulaires)

Recopier le tableau suivant T_7 puis répondre aux questions.

Modalités	Agriculture	Industrie	Mine	Bâtiment	Commerce	Total
Effectif	510	380	40	250	450	
Fréquence						
α_i						

1. Calculer les fréquences f_i
2. Déterminer les angles $\alpha_i = 360 \times f_i$ puis compléter le tableau T_7
3. Tracer le diagramme à secteur circulaire de cette série.

La représentation graphique à secteurs circulaires est en générale, utilisée lorsqu'on considère des séries statistiques à caractère qualitatif. Il consiste à déterminer sur un disque circulaire des secteurs dont les angles sont proportionnels aux effectifs (ou aux fréquences).

Activité 6 (Représentation graphique Histogramme)

Recopier dans votre cahier le tableau T_2 puis construire son histogramme

L'histogramme est utilisé lorsqu'on considère des séries statistiques à caractère quantitatif continu. Il s'obtient en formant des rectangles dont les bases sont les amplitudes des intervalles et d' hauteurs proportionnelles aux effectifs ou aux fréquences.

Activité 7(Série statistique chronologique)

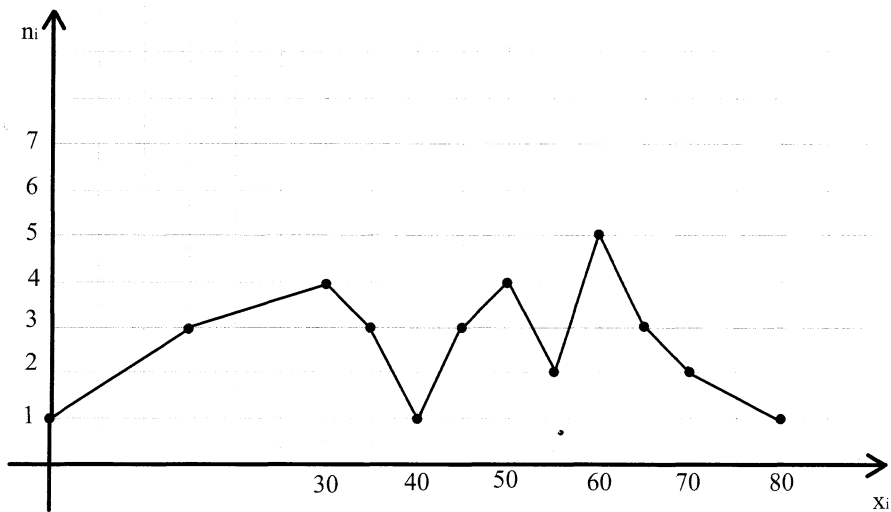
Le tableau suivant T_8 indique les résultats du baccalauréat de l'année 2000 jusqu'à l'année 2004 .dans une établissement A

Année	2000	2001	2002	2003	2004
Nombre de réussites	850	764	884	566	900
K_i					

1. Calculer le coefficient multiplicateur qui permet de passer d'une année à une année suivante, et compléter le tableau.
2. Construire le diagramme en bâtons des coefficients trouvés précédemment

Activité 8 (Paramètre de position : mode)

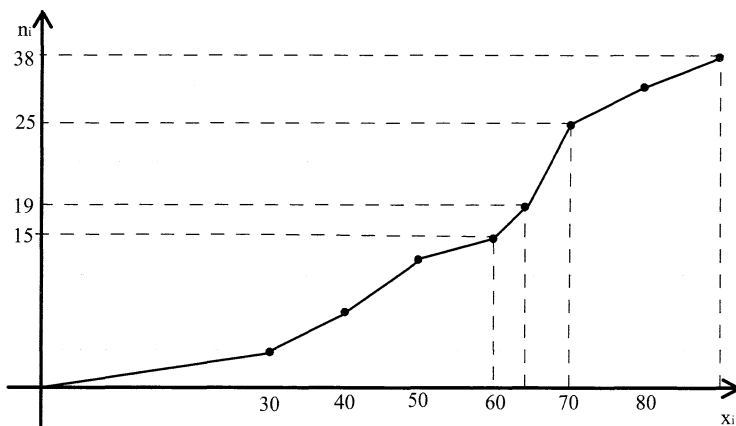
1. Déterminer le mode de la série représentée par le tableau T_6 .
2. Trouver les modes de la série présentés par la figure suivante.



- On appelle mode d'une série statistique toute valeur, ou modalité, ou classe d'effectif maximal.
- Le mode d'une série statistique est donc parmi les valeurs, ou modalités ou classes celle de plus grande fréquence.
- Lorsque les données sont groupées en classes le mode est appelé classe modale.
- Une série statistique peut présenter plusieurs modes, la série est dite multimodale

Activité 9 (Paramètre de position : médiane)

La figure suivante est le polygone des effectifs cumulés croissants d'une série statistique, déterminer graphiquement la médiane M_c de cette série.



Soit une série statistique correspondant à un caractère quantitatif aux valeurs ordonnées. On appelle médiane tout nombre noté M_e ayant la propriété suivante : L'effectif des valeurs strictement inférieur à M_e et l'effectif strictement supérieur à M_e ne dépassent pas la moitié de l'effectif total.

Activité 10 (Paramètre de position : moyenne)

1. Le Tableau suivant représente une série à caractère quantitatif discret. Il s'agit de la répartition des élèves d'une classe selon leur note dans un devoir de mathématiques.

coefficient	1	3	2	4
Note	8	7,5	14	16

- Calculer la moyenne de cette série
2. Sachant que la valeur du dernier effectif est x et que $\bar{X} = 9,6$
Calculer la valeur de x.

Si les valeurs du caractère sont $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_p$ et si les effectifs correspondant sont $n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_p$ alors la moyenne de la série est : $\bar{X} = \frac{x_1.n_1 + x_2.n_2 + \dots + x_i.n_i + \dots + x_p.n_p}{N}$, où N est l'effectif total.

3. Le tableau ci-dessous indique les âges des élèves de la première pour un ensemble de lycées .Compléter le tableau et calculer sa moyenne.

Ages en années x_i	13	14	15	16	17	18
Effectif n_i	473	11487	29303	13644	1862	57
$X_i \cdot n_i$						

II. Corrigés des activités (bien assimiler mon cours)

Activité 1

- Pour les tableaux T_1 , T_2 et T_3 la population est constituée par l'ensemble des élèves d'une classe de 1^{ère} année.
 - Les individus sont les élèves de cette classe.
2. Dans chaque tableau, on étudie un caractère de cette population :
 - Dans le tableau T_1 : Le caractère étudié est « nombre de frères et sœurs de l'élève ». C'est un caractère quantitatif discret (il s'agit d'un caractère mesurable de valeurs finies).
 - Dans le tableau T_2 : le caractère étudié est « l'âge des frères et sœurs de chaque élève ». C'est un caractère quantitatif continu (il s'agit d'un caractère mesurable qui peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle).
 - Dans le tableau T_3 : Le caractère étudié est « sexe de l'élève ». C'est un caractère qualitatif (il s'agit d'un caractère non mesurable).

Activité 2

1. L'effectif total $N = 9,8$ donc les fréquences $F_i = \frac{n_i}{9,8}$

Valeur du caractère	Jeune	adulte	Troisième âge
Effectifs en millions	4,8	3,8	1,2
Fréquence F_i	0,49	0,388	0,122
F_i (en %)	49 %	38,8 %	12,2 %

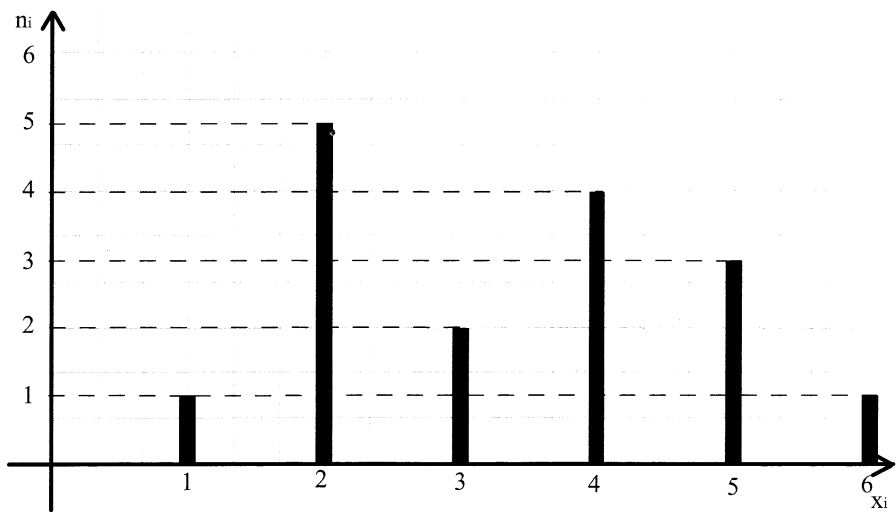
Activité 3

Le tableau suivant T_5 donne les effectifs pour la variable âge

âge	14	15	16	17
Effectif	5	14	10	6
fréquence	0,14	0,4	0,29	0,17
E_k^{\nearrow}	5	19	29	35
E_k^{\searrow}	35	30	16	6
F_k^{\nearrow}	0,14	0,54	0,83	1
F_k^{\searrow}	1	0,86	0,40	0,17

Activité 4

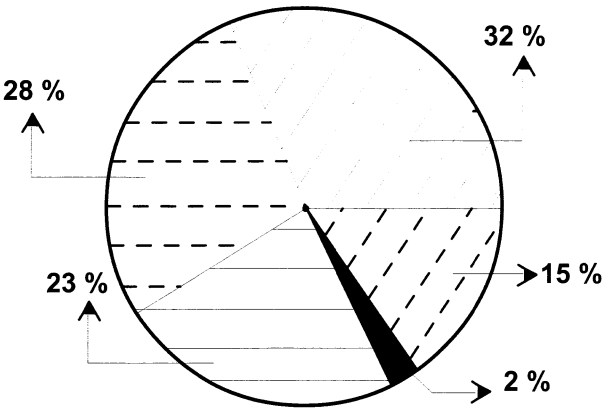
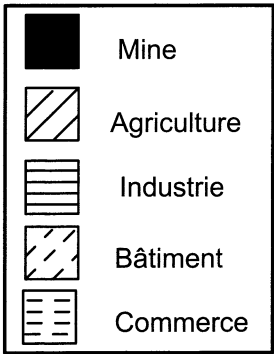
Valeur du caractère x_i	1	2	3	4	5	6	Total
Effectif n_i	1	5	2	4	3	1	11



Activité 5

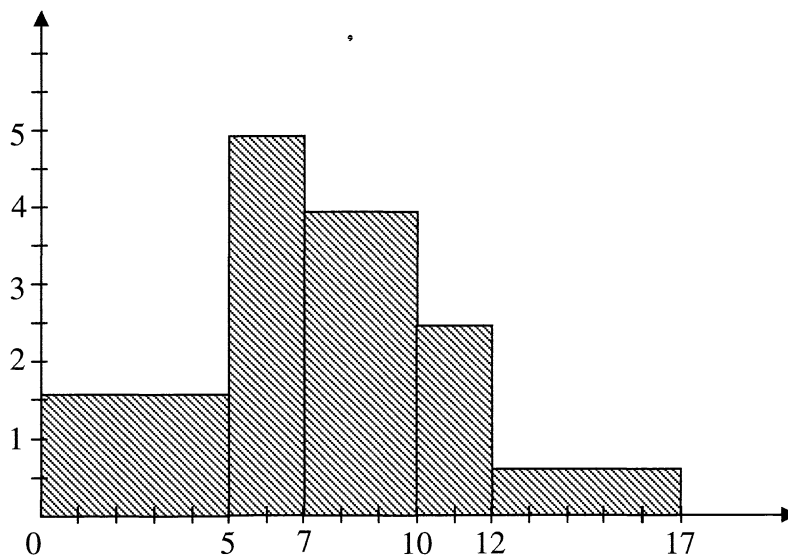
Recopier le tableau suivant T_7 puis répondre aux questions.

Modalités	Agriculture	Industrie	Mine	Bâtiment	Commerce	Total
Effectif	510	380	40	250	450	1630
Fréquence	0,3129	0,2331	0,0245	0,1534	0,2761	1
α_i (en degré)	112,644	83,916	8,82	55,224	99,396	360



Activité 6

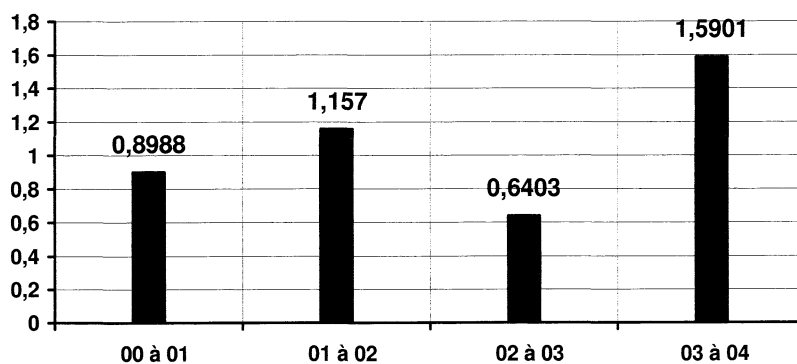
âge (an)	Moins de 5	[5,7[[7,10[[10,12[Plus que 12
Nombre d'observations	8	10	12	5	3



Activité 7

Le tableau suivant indique les résultats du baccalauréat de l'année 2000 jusqu'à l'année 2004 dans un établissement A

Année	2000	2001	2002	2003	2004
Nombre de réussites	850	764	884	566	900
K_i		0,8988	1,1570	0,6403	1,5901

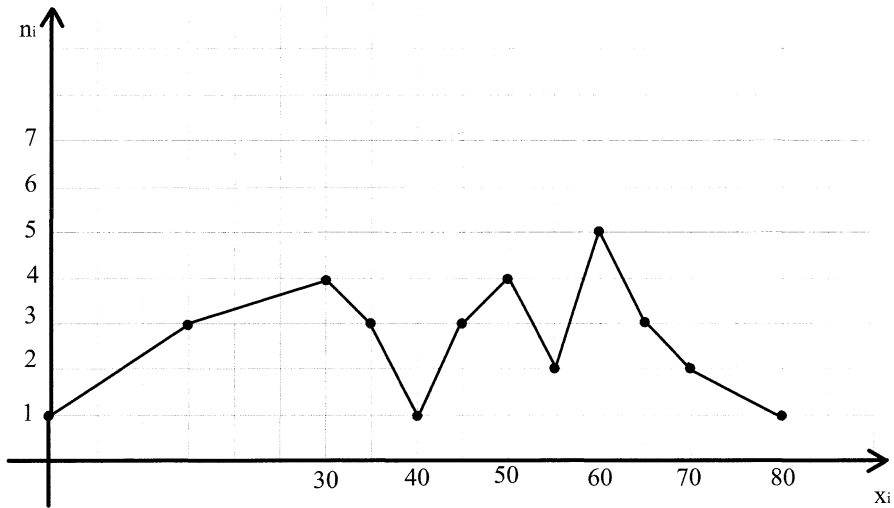


Activité 8

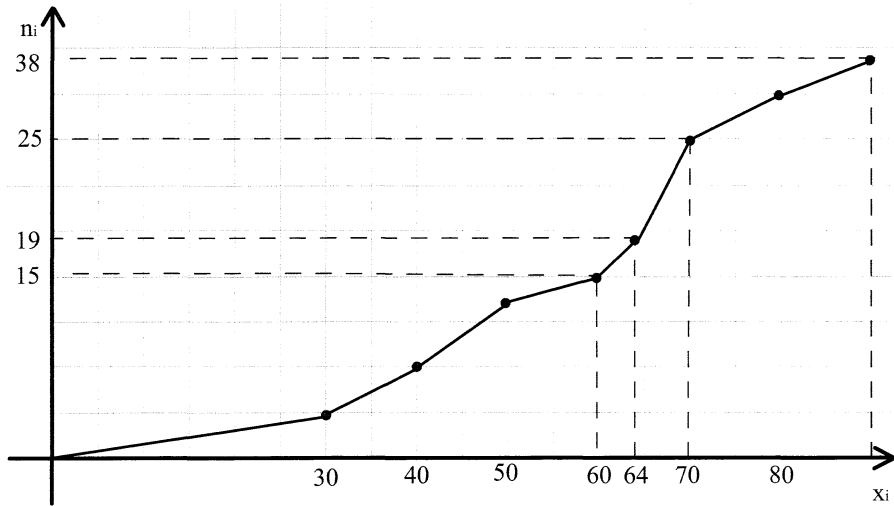
Valeur du caractère x_i	1	2	3	4	5	6	Total
Effectif n_i	1	5	2	4	3	1	11

Le mode de cette série est la valeur du caractère qui correspond au plus grand effectif c'est la valeur 2 qui a l'effectif 5 donc le mode est 2

3. Les modes de la série présentée par la figure suivante sont 30, 50 et 60.



Activité 9



On lit directement sur la figure la moitié de l'effectif total est 19 qui lui correspond la valeur du caractère 64 . Donc la médiane de cette série est $M_e = 64$.

Activité 10

Le Tableau suivant représente une série à caractère quantitatif discret.

x_i (note)	7,5	8	14	16	Total
n_i	8	9	5	6	28
n_ix_i	60	72	70	96	298

1. la moyenne de cette série est donnée par la formule

$$\overline{X} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4x_4}{N} = \frac{60 + 72 + 70 + 96}{28} = \frac{298}{28} = 10,64$$

2.
$$\overline{X} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4x_4}{N} = \frac{60 + 72 + 70 + 6x}{28} = \frac{202 + 6x}{28}$$

$$202 + 6x = 9,6 \times 28 \text{ donc } 202 + 6 = 268,8$$

$$x = \frac{66,8}{6} = 11,13$$

3.

Âges en années x_i	13	14	15	16	17	18
Effectif n_i	473	11487	29303	13644	1862	57
X_i.n_i	6149	160818	439545	218304	31654	1026

Effectif total N = 56826 donc la moyenne est

$$\overline{X} = \frac{6149 + 160818 + 439545 + 218304 + 31654 + 1026}{56826} = 15,09$$

III. Exercices (je maîtrise mes connaissances)

Exercice 1

Dans chacune des situations statistiques suivantes indiquez la population, le caractère (ou variable) à étudier. Préciser la nature du caractère (qualitatif, quantitatif).

1. Note obtenue au devoir de mathématiques.
2. Catégories socioprofessionnelles d'un groupe de personnes
3. Nombre de personne employées par l'ensemble des entreprises d'une localité.
4. Distance entre le domicile et le lieu de travail.
5. Disciplines sportives pratiquées par les élèves d'un lycée.

Exercice 2

Dans deux entreprises A et B les salaires horaires sont classés de la façon suivante:

Salaire en dinars	[1, 2.5[[2.5, 4[[4, 5.5[[5.5, 7[[7, 8.5[
Effectifs de A	50	65	17	10	8
Effectifs de B	35	15	12	12	14

1. Trouver la classe modale de cette série.
2. Etablir le tableau associé des fréquences.
3. Construire sur un même schéma les histogrammes des fréquences.
4. Comparer les salaires moyennes des deux entreprises.

Exercice 3

On lance deux dés et on ajoute les numéros obtenus à chaque lancer on obtient le tableau suivant:

Résultats	2	3	4	5	6	7
Effectifs	52	70	102	150	200	225

1. Déterminer le mode de cette série.
2. Etablir un diagramme en bâtons de ces résultats
3. Déterminer les fréquences associées.
4. Calculer la moyenne de cette série

Exercice 4

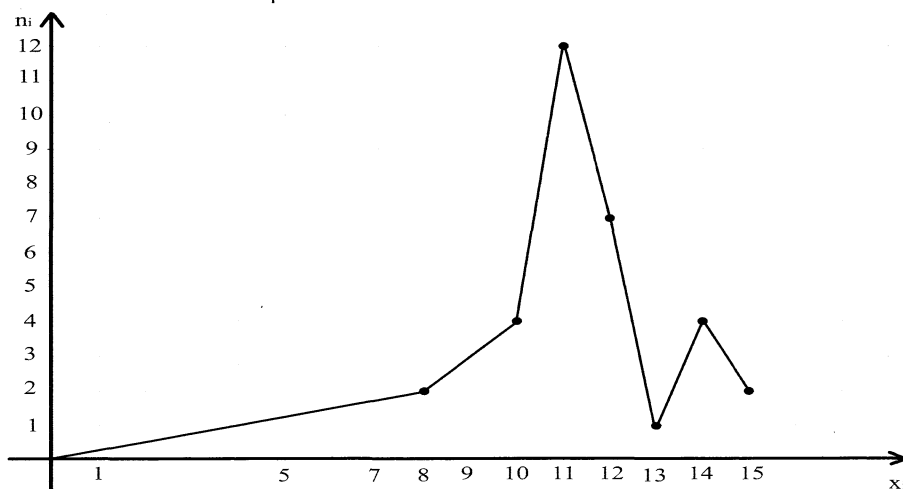
On a relevé les distances du domicile au lieu de travail pour 500 salariés d'une entreprise.

Distance (en Km)	[0,1[[1,2[[2,5[[5,10[[10,20[[20,50[
Effectifs	30	141	78	217	10	24

1. Calculer les fréquences de chaque classe puis les fréquences cumulées croissantes.
2. Calculer la moyenne \bar{X} de cette série statistique.
3. Tracer la courbe des fréquences cumulées croissantes
4. Trouver une valeur approchée de la médiane

Exercice 5

Le diagramme suivant donne la répartition des notes d'une classe de première à un devoir de mathématiques.



1. A partir du diagramme préciser le caractère étudié et déterminer les fréquences de chacune de ces valeurs (donner les résultats dans un tableau)
2. Calculer la moyenne de cette série.
3. Déterminer une valeur approchée de la médiane.

Exercice 6

Les élèves de deux classes de première ont lancé le poids. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant.

Distance (en mètre)	[2,3[[3,4[[4,4.5[[4.5,5[[5,5.5[[5.5,6[[6,7[[7,8[
Effectifs	1	16	18	15	10	6	3	1

1. Construire l'histogramme, le polygone des effectifs cumulés croissants et le polygone des effectifs cumulés décroissants.
2. Déterminer la médiane M_e de cette série statistique.
3. Calculer la moyenne \bar{X} de cette série.

IV. Corrigés des exercices (je maîtrise mes connaissances)

Exercice 1

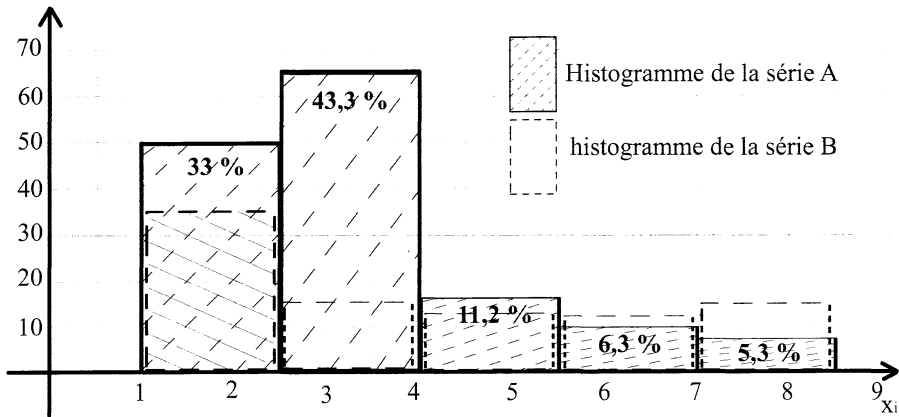
- 1. La population est l'ensemble sur le quel porte l'étude c'est l'ensemble des notes obtenues au devoir de mathématiques. Le caractère est mesurable qui prend des valeurs finies donc c'est un caractère quantitatif discret (ou discontinue).
- 2. La population sur laquelle porte l'étude est un groupe de personnes. Le caractère à étudié n'est pas soumis à une mesure il s'agit des catégories socioprofessionnelles d'un groupe de personnes donc c'est un caractère qualitatif.
- 3. La population sur laquelle porte l'étude sont des entreprises d'une localité. Le caractère à étudier concerne le nombre d'ouvriers par entreprise donc les modalités sont les entreprises d'une localité. Il s'agit donc d'un caractère qualitatif.
- 4. La population sur laquelle porte l'étude c'est les distances entre le domicile et le lieu de travail. Donc il s'agit d'un caractère mesurable qui prend toutes les valeurs d'un intervalle, c'est un caractère quantitatif continu
- 5. La population sur laquelle porte l'étude sont les disciplines sportives pratiquées par les élèves d'un lycée. Il s'agit donc d'un caractère qualitatif.

Exercice 2

- 1. La classe modale de cette série A est l'intervalle qui a le plus grand effectif donc c'est l'intervalle [2.5 , 4[. La classe modale de cette série B est [1, 2.5[
- 2. Il faut d'abord calculer l'effectif total de chaque série soit alors $N_A = 150$ pour la série A et $N_B = 88$ pour la série B

Salaire en dinars	[1, 2.5[[2.5 , 4[[4 , 5,5[[5.5 , 7[[7 , 8.5[
Effectifs de A	50	65	17	10	8
Fréquence de A	33,3 %	43,3 %	11,2 %	6,3 %	5,3 %
Effectifs de B	35	15	12	12	14
Fréquence de A	39,7 %	17 %	13,6 %	13,6 %	15,9 %

3.



4. Pour déterminer le salaire moyenne des deux entreprises il faut d'abord déterminer les centres des classes. On obtient donc le tableau suivant

Salaire en dinars	1,75	3,25	4,75	6,25	7,75
Effectifs de A	50	65	17	10	8
$n_i \cdot x_i$	87,5	211,25	80,75	62,5	62
Effectifs de B	35	15	12	12	14
$n'_i \cdot x'_i$	61,25	48,75	57	75	108,5

Le salaire moyenne de l'entreprise A est $\bar{X} = \frac{87,5 + 211,25 + 80,75 + 62,5 + 62}{150} = 3,36$

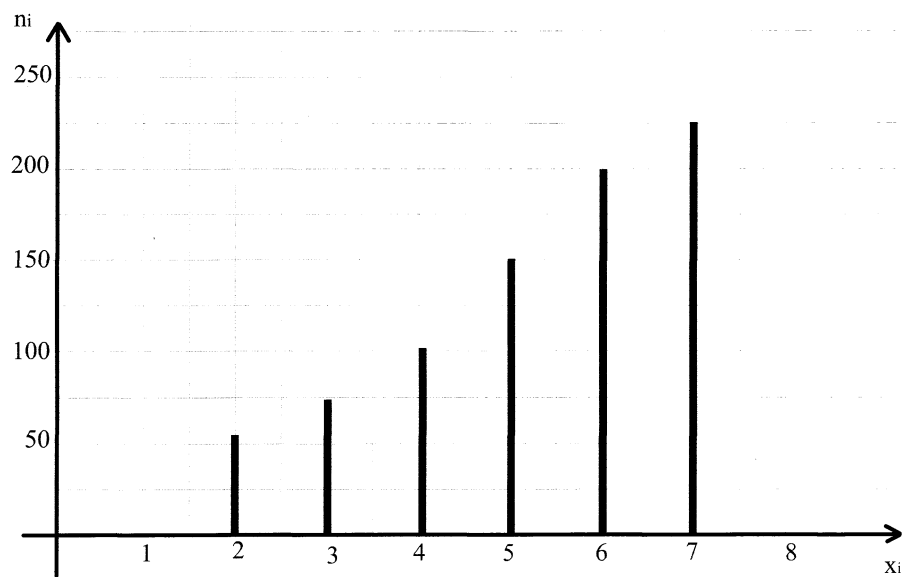
Le salaire moyen de l'entreprise B est $\bar{Y} = \frac{61,25 + 48,75 + 57 + 75 + 108,5}{88} = 3,98$

Donc le salaire moyen de l'entreprise B est plus élevé que le salaire moyen de l'entreprise A.

Exercice 3

1. Le mode de cette série est 7.

2.



3. L'effectif total de cette série est de $N = 799$

Les fréquences $F_i = \frac{n_i}{N}$

x_i	2	3	4	5	6	7
n_i	52	70	102	150	200	225
F_i (%)	6,5	8,8	12,8	18,8	25	28,1
$x_i \cdot n_i$	104	210	408	750	1200	1575

4. La moyenne de cette série est $\bar{X} = \frac{104 + 210 + 408 + 750 + 1200 + 1575}{799} = 5,31$

Exercice 4

L'effectif total est $N = 500$. Il est nécessaire de déterminer les centres des classes et le produit $x_i \cdot n_i$ pour le calcul de la moyenne.

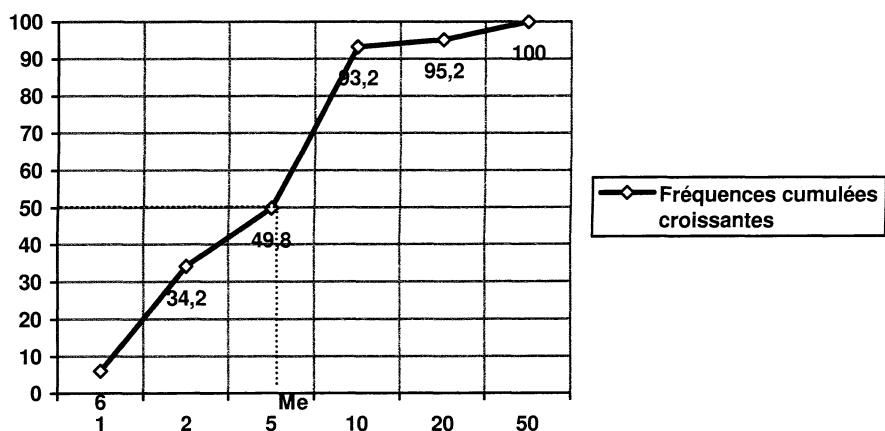
1.

Distance (en Km)	0,5	1,5	3,5	7,5	15	35
Effectifs	30	141	78	217	10	24
$n_i \cdot x_i$	15	211,5	273	1627,5	150	840
Fréquence en %	6	28,2	15,6	43,4	2	4,8
$F_i \nearrow$	6	34,2	49,8	93,2	95,2	100

2. La moyenne \bar{X} de cette série statistique est :

$$\bar{x} = \frac{15 + 211,5 + 273 + 1627,5 + 150 + 840}{500} = 6,34.$$

3.

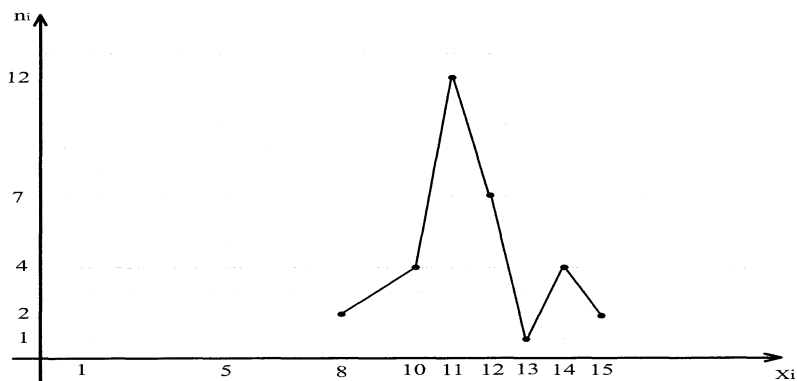


Graphiquement, le point d'ordonnée 50 a pour abscisse environ 5.

Donc $Me \approx 5$

Exercice 5

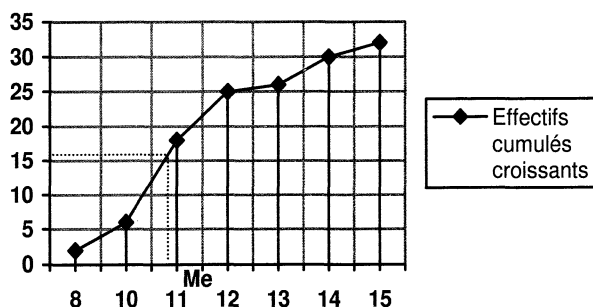
Le diagramme suivant donne la répartition des notes d'une classe de première à un devoir de mathématiques.



1. Le caractère étudié prend des valeurs réelles finies donc c'est un caractère quantitatif discret. L'effectif total de cette série est $N = 32$.
D'après le graphique on note les résultats dans le tableau suivant :

Note	8	10	11	12	13	14	15
Effectif	2	4	12	7	1	4	2
Fréquence	6,25 %	12,5 %	37,5 %	21,9 %	3,1 %	12,5 %	6,25 %
$x_i \cdot n_i$	16	40	132	84	13	56	30
E_k^{\nearrow}	2	6	18	25	26	30	32

2. La moyenne de cette série est $\bar{X} = \frac{16+40+132+84+13+56+30}{32} \approx 11,59$.
3. Pour calculer la médiane il est nécessaire d'exprimer soit les effectifs cumulés croissants soit les fréquences cumulées croissantes, on ajoute donc une ligne dans le tableau précédent des effectifs cumulés croissants. Graphiquement, le point d'ordonnée 16 a pour abscisse environ 10,8. Donc $Me \approx 10,8$

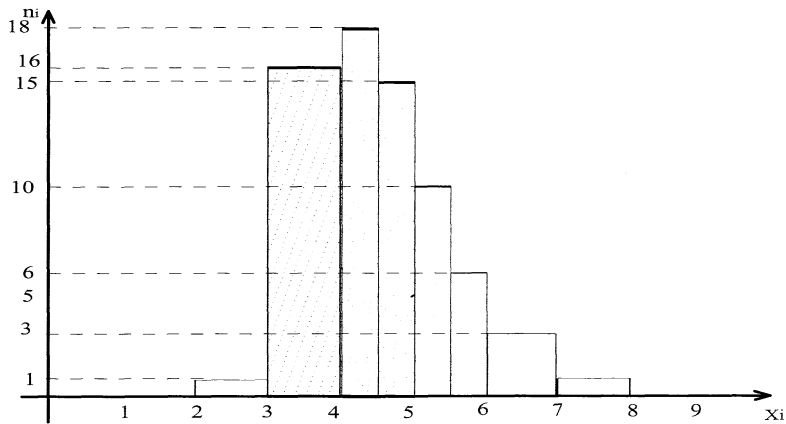


Exercice 6

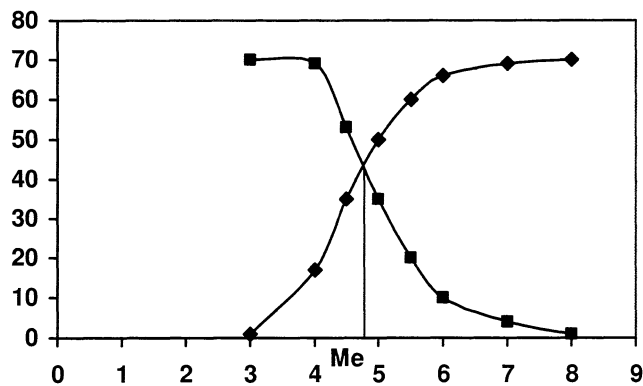
On ajoute d'abord dans le tableau de la série concerné Trois lignes des effectifs cumulés croissants et des effectifs cumulés décroissants et le produit $x_i \cdot n_i$ ou x_i désigne les centres des classes et n_i l'effectif correspondant.

Classe	[2,3[[3,4[[4,4.5[[4.5,5[[5,5.5[[5.5,6[[6,7[[7,8[
x_i	2,5	3,5	4,25	4,75	5,25	5,75	6,5	7,5
Effectifs	1	16	18	15	10	6	3	1
E_k^{\nearrow}	1	17	35	50	60	66	69	70
E_k^{\searrow}	70	69	53	35	20	10	4	1
$x_i \cdot n_i$	2,5	56	76,5	71,25	52,5	34,5	19,5	7,5

1. Histogramme



2. polygones des effectifs cumulés décroissants et croissants.



3. La médiane M_e peut être déterminé graphiquement par la valeur approché du caractère qui correspond à la moitié de l'effectif total soit alors 4,75

4. La moyenne \bar{X} de cette série est déterminé par :

$$\bar{X} = \frac{2,5 + 56 + 76,5 + 71,25 + 52,5 + 34,5 + 19,5 + 7,5}{70} = 4,575.$$

Sections planes d'un solide

I. Activités pour bien assimiler mon cours

Activité 1 (Comment démontrer si deux droites sont parallèles)

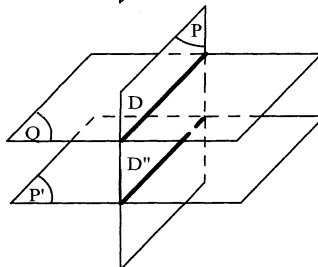
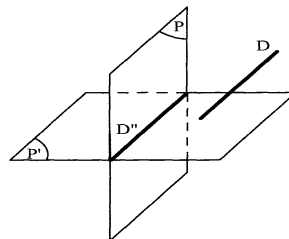
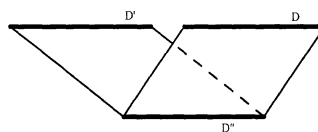
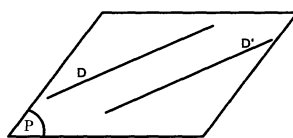
Soit un tétraèdre ABCD. On pose I, J, K, L, et M les points respectivement des côtés [AB], [AC], [AD], [BC] et [BD] tel que : $AI = \frac{1}{3} AB$, $AJ = \frac{1}{3} AC$, $AK = \frac{1}{3} AD$,

L est le milieu de [BC] et M le milieu de [BD].

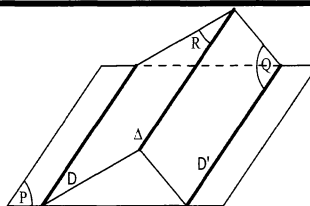
1. Montrer que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.
2. Démontrer que les droites (JK) et (LM) sont parallèles.

Pour démontrer que deux droites D et D' sont parallèles on peut utiliser l'une des situations suivantes.

- On démontre que les deux droites D et D' sont coplanaires (contenues dans un même plan) et d'intersection vide ou elles sont confondues.
- Les deux droites D et D' sont parallèles à une même troisième.
- L'une des deux droites est parallèle à deux plans sécants selon l'autre droite.
- Les deux droites D et D' sont respectivement les intersections d'un plan P avec deux plans parallèles.



- Il existe une droite Δ Parallèle à un plan P et deux plans Q et R sécants selon Δ et sécants respectivement à P selon D et Q selon D' .



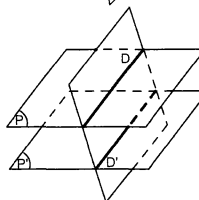
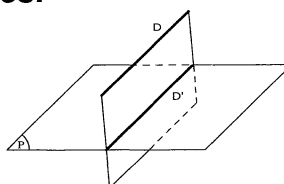
Activité 2 (Comment démontrer si une droite est parallèle à un plan)

Soit $ABCD$ un tétraèdre. Et on pose I, J les milieux respectifs des arêtes $[AB]$ et $[AD]$, I' et J' les symétriques respectifs de I et J par rapport à A .

1. Démontrer que la droite $(I'J')$ est parallèle au plan (BCD) .
2. Déterminer l'intersection des plans (BCD) et $(C'I'J')$

Pour démontrer q'une droites D est parallèle à un plan P on peut utiliser l'une des situations suivantes.

- La droite D est parallèle à une droite contenue dans le plan P .
- La droite D est contenue dans un plan parallèle au plan P .



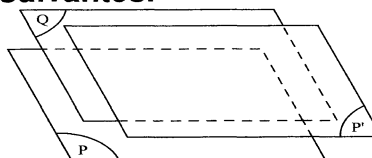
Activité 3 (Comment démontrer si deux plans sont parallèles)

Soit un tétraèdre $ABCD$. Et les points I, J et K les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$.

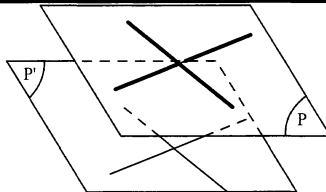
1. Montrer que les droites (IJ) et (JK) sont parallèles au plan (BCD)
2. Dédire que les plans (IJK) et (BCD) sont parallèles.

Pour démontrer que deux plans P et P' sont parallèles on peut utiliser l'une des situations suivantes.

- Les deux plans sont parallèles à un même troisième.



- L'un d'eux contient deux droites sécantes parallèles à l'autre.



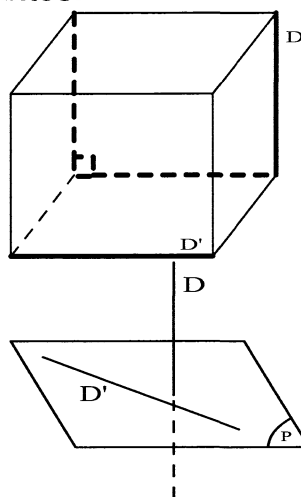
Activité 4 (Comment démontrer si deux droites sont orthogonales)

Soit ABCDEFGH un cube .

1. Montrer que les droites (BE) et (DG) sont orthogonales.
2. Les droites (BE) et (AH) sont elles orthogonales.

Pour démontrer que deux droites sont orthogonales on peut utiliser l'une des situations suivantes.

- Les parallèles aux deux droites menées d'un point sont perpendiculaires.
- L'une d'elles est perpendiculaire à un plan qui contient l'autre.



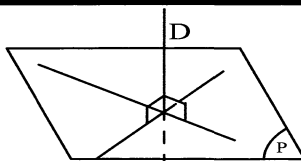
Activité 5 (Comment démontrer si une droite est perpendiculaire à un plan)

Soit un cube ABCDEFGH.

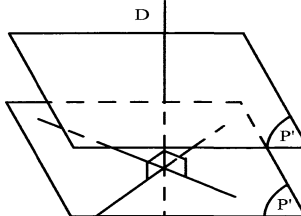
1. Montrer que la droite (DC) est perpendiculaire au plan (ADH).
2. Quel est la nature du triangle (BDH).

Pour démontrer q'une droite D est perpendiculaire à un plan P on peut utiliser l'une des situations suivantes.

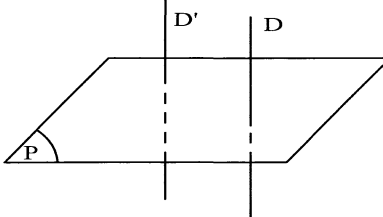
- La droite D est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan P



- La droite D est perpendiculaire à un plan parallèle au plan P .



- La droite D est parallèle à une droite perpendiculaire au plan P



Activité 6 (Section plane d'un parallélépipède rectangle)

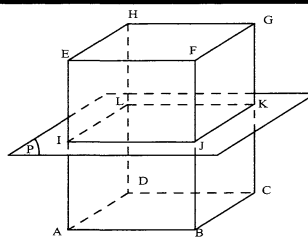
Soit un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$.

On désigne par I le milieu de $[AE]$ et P le plan parallèle à la face $ABCD$.

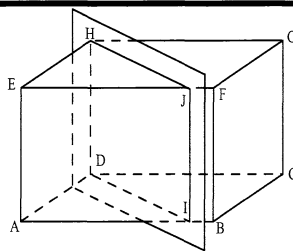
P coupe $[BF]$ en J , $[CG]$ en K et $[DH]$ en L .

1. Montrer que les droites (IJ) et (KL) sont parallèles.
2. Montrer que le triangle IJK est rectangle en J .
3. Déterminer la section plane du parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ par le plan P .

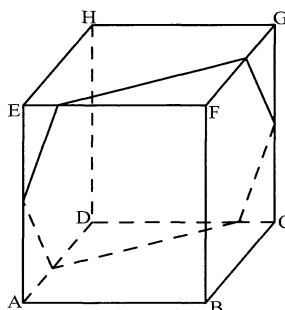
- La section plane d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à l'une des faces est un rectangle.



- La section plane d'un parallépipède rectangle par un plan contenant l'un des arêtes est un rectangle.



- La section plane d'un parallépipède rectangle par un plan quelconque, est un polygone tel que si deux faces parallèles rencontrent ce plan. Alors elles le rencontrent suivant deux droites parallèles.

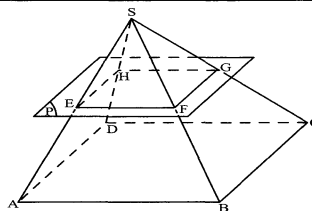


Activité 7 (Section plane d'une pyramide)

Soit ABCD un tétraèdre.

1. Soit P le plan parallèle à (AB) et à (CD) et passant par un point E du segment [AC], il coupe [BC] en F, [AD] en H et [BD] en G. Montrer que $(EH) \parallel (DC)$ et $(EF) \parallel (AB)$.
2. Quelle est la section plane du tétraèdre ABCD par le plan P.

- La section plane d'une pyramide par un plan parallèle à la base est un polygone de même nature que cette base.
- La section plane d'une pyramide par un plan parallèle à l'un des arêtes est un parallélogramme.

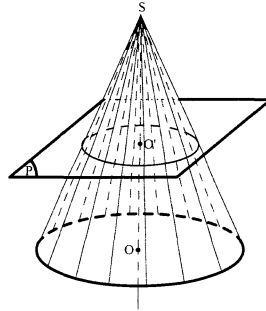


Activité 8 (Section plane d'un solide)

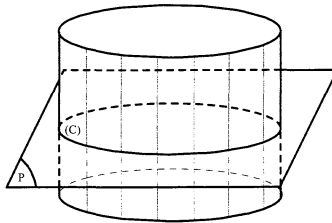
Soit un cône de révolution de sommet S et de base \mathcal{C} de centre O et d'hauteur $h = 4\text{ cm}$. On désigne par \mathcal{C}' de centre O' est la section plane du cône par un plan P parallèle à la base. On donne $OO' = 2\text{ cm}$, et le cercle \mathcal{C} de rayon $r = 2\text{ cm}$.

1. Calculer le rayon r' du cercle \mathcal{C}' .
2. Calculer l'aire du cercle \mathcal{C}' .

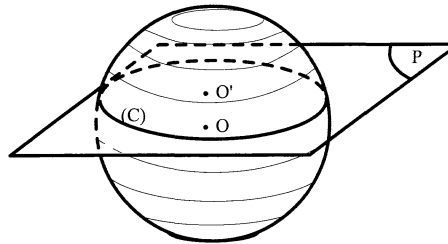
- La section plane d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base est un cercle.



- La section plane d'un cylindre par un plan parallèle à la base est un cercle.



- La section plane d'une sphère par un plan est un cercle. Si le plan passe par le centre de la sphère la section obtenue est le grand cercle de la sphère.



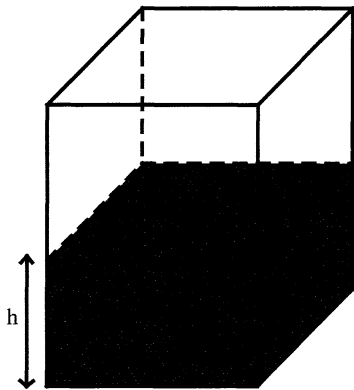
Activité 9 (Calculs de volumes)

On considère un parallélépipède rectangle dont l'aire de la base est 20cm^2 et de hauteur h on désigne par V le volume du parallélépipède..

1. Compléter le tableau suivant.

h	1	2	3
V			

2. On suppose que le volume V est 100 cm^3 et l'aire de la base 20 cm^2 . Calculer la hauteur de ce parallélépipède rectangle.
3. On suppose maintenant que le volume 100 cm^3 et la hauteur $h = 5\text{ cm}$, la longueur de la base est 5 cm . Calculer la largeur de la base.



Formulaires de calculs d'aires et de volumes.

• Calculs d'aires

rectangle	Triangle	Trapeze	Cercle	Arc de cercle
 $S = L.l$	 $s = \frac{B \times h}{2}$	 $S = \frac{(B + b) \times h}{2}$	 $S = \pi \times R^2$	 $S = \frac{\alpha \times R^2}{2}$

• Calculs des volumes

Parallélépipède	Cylindre	Pyramide	Cône	Sphère
 $V = L \times l \times h$	 $V = \pi R^2 \times h$	 $V = \frac{1}{3} . B \times h$	 $V = \frac{1}{3} . \pi . R^2 \times h$	 $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ L'aire totale est : $4\pi R^2$

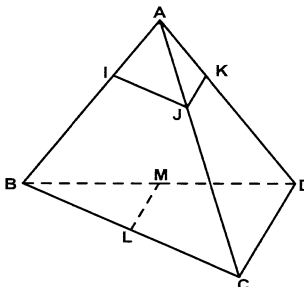
II. Corrigés des activités (bien assimiler mon cours)

Activité 1

1. On a : $\frac{AI}{AB} = \frac{1}{3}$ et $\frac{AJ}{AC} = \frac{1}{3}$ donc $\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC}$.

On appliquant la réciproque du théorème de Thalès on aura : $(IJ) \parallel (BC)$

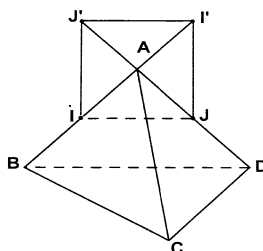
2. De la même façon que la question 1. On montre que $(JK) \parallel (CD)$. D'autre part on a : L est le milieu de $[BC]$ et M est le milieu de $[BD]$ donc $(LM) \parallel (CD)$. Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles donc $(JK) \parallel (LM)$.



Activité 2

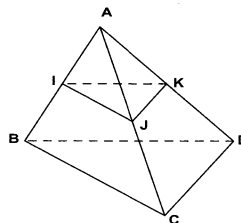
Dans le plan (ABD) , IJJ' est un parallélogramme car les diagonales $[II']$ et $[JJ']$ se coupent en leur milieu. Donc les côtés opposés (IJ) et $(I'J')$ sont parallèles. Dans le triangle ABD on a : I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[AD]$ donc $(IJ) \parallel (BD)$. La droite $(I'J')$ est donc parallèle à une droite du plan (BCD) donc elle est parallèle à ce plan.

2. Les plans $(CI'J')$ et (BCD) ont un point commun C et I' n'est pas un point de (BCD) donc ces deux plans sont distincts. Ils sont donc sécants suivant une droite qui contient C. La droite $(I'J')$ est parallèle au plan (BCD) donc l'intersection des plans $(CI'J')$ et (BCD) c'est la parallèle à $(I'J')$ passant par C, c'est donc la droite parallèle à (BD) passant par C.



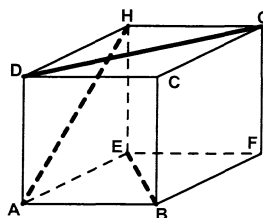
Activité 3

1. Dans le triangle ABC on a : I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[AC]$ donc $(IJ) \parallel (BC)$. La droite (BC) est contenue dans le plan (BCD) donc (IJ) est parallèle au plan (BCD) . De la même manière on montre que (JK) est parallèle au plan (BCD) .
2. Les droites (IJ) et (JK) sont sécantes dans le plan (IJK) qui sont parallèles au plan (BCD) d'où le plan (IJK) est parallèle au plan (BCD) .



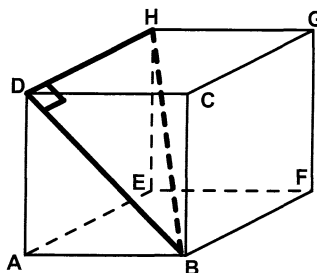
Activité 4

1. Chaque face d'un cube est un carré. Donc les diagonales $[DG]$ et $[CH]$ de la face $CGHD$ sont perpendiculaires. Or Les droites (BE) et (CH) sont parallèles donc les droites (BE) et (DG) sont orthogonales.
2. Si (BE) orthogonale à (AH) alors les droites (AH) et (CH) seront perpendiculaires. Or le triangle AHC est équilatérale (les diagonales des faces d'un cube sont égaux) donc (AH) et (CH) ne sont pas perpendiculaires et par suite (BE) et (AH) sont non orthogonales.



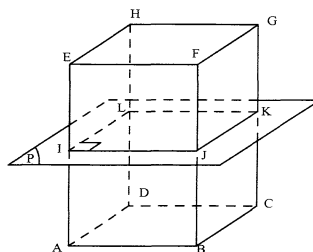
Activité 5

1. $[DC]$ est un côté commun aux deux faces $DCGH$ et $ABCD$ donc (DC) est perpendiculaire aux deux droites sécantes (DH) et (AD) du plan (ADH) donc la droite (DC) est perpendiculaire au plan (ADH) .
2. (DH) est perpendiculaire au plan du face $ABCD$ donc les droites (DH) et (BD) sont perpendiculaire ((BD) est contenue dans le plan $ABCD$. Ce qui donne que le triangle BDH est rectangle en D .



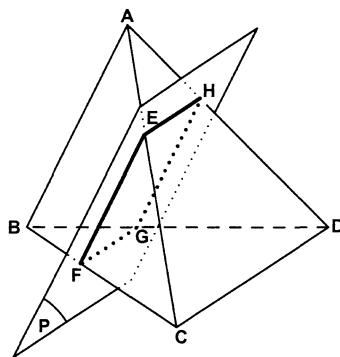
Activité 6

1. Les deux plans P et (ABC) sont parallèles, la droite (IJ) est contenue dans le plan P donc (IJ) est parallèle au plan (ABC) , or le plan (ABF) contient la droite (IJ) et coupe (ABC) selon la droite (AB) donc $(IJ) \parallel (AB)$. De la même façon on a : la droite (LK) est parallèle au plan (ABC) et de plus le plan (HGC) contient la droite (LK) et coupe le plan (ABC) selon la droite (DC) donc (LK) est parallèle à (DC) . Puisque $(DC) \parallel (AB)$ donc $(LK) \parallel (AB)$ et par suite (LK) et (IJ) sont parallèles à une même troisième donc elles sont parallèles.
2. De la même façon que la première question on montre que les droites (IL) et (JK) sont parallèles ce qui donne que $IJKL$ est un parallélogramme. On a : $(IJ) \parallel (AB)$ et $(AB) \perp (BCF)$ donc $(IJ) \perp (BCF)$, la droite (JK) est contenue dans le plan (BCF) donc les droites (IJ) et (JK) sont perpendiculaires. Par suite le triangle (IJK) est rectangle en J .
3. D'après ce qui précède $IJKL$ est un parallélogramme qui a un angle droit donc c'est un rectangle, donc la section plane du parallépipède rectangle $ABCDEFGH$ par P est le rectangle $IJKL$.



Activité 7

1. La droite (DC) est parallèle au plan P, (EH) est l'intersection des plans (ACD) et P donc (EH) et (CD) sont parallèles. La droite (AB) est parallèle au plan P, La droite (EF) est l'intersection des plans (ABC) et P donc les droites (AB) et (EF) sont parallèles.
2. D'une manière analogue on montre que (FG) // (CD) et (GH) // (AB) ce qui donne (EF) // (GH) et (EH) // (FG) donc EFGH est un parallélogramme.

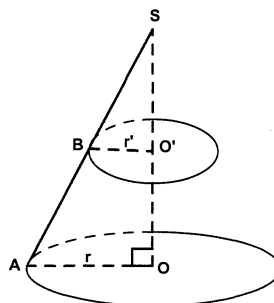


Activité 8

1. On désigne par [SA] une génératrice du cône, et B l'intersection de P avec [SA], (O'B) est une droite de P qui est parallèle au plan Q du cercle de base (C) donc (O'B) est parallèle au plan Q. La droite (OA) est l'intersection du plan (AOS) et Q donc les droites (O'B) et (OA) sont parallèles. En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle OAS on obtient : $\frac{SO'}{SO} = \frac{O'B}{OA}$ donne

$$O'B = \frac{SO'}{SO} \times OA \text{ donc le rayon } r' = O'B = 1 \text{ cm}$$

2. L'aire du cercle (C') est $\Psi = \pi r'^2$ donc $\Psi = \pi = 3,14 \text{ cm}^2$.



Activité 9

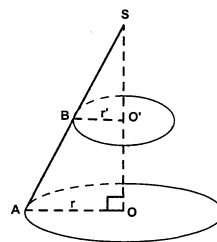
1. Le volume du parallélépipède rectangle est donné par la formule $V = B.h$ et par suite on aura :

h	1	2	3
V	20 cm ³	40 cm ³	60 cm ³

2. De la relation $V = B.h$ on trouve $h = \frac{V}{B} = \frac{100}{20} = 5 \text{ cm}$

3. On désigne par ℓ la longueur de la base . $B = L.\ell$ donc $V = L.\ell.h$, ce qui donne

$$\ell = \frac{V}{L.h} = \frac{100}{5 \times 5} = 4 \text{ cm}.$$



III. Exercices (je maîtrise mes connaissances)

Exercice 1

Etant donnée deux droites parallèles (D_1) et (D_2) et deux droites quelconques (D_3) et (D_4) .

Peut on construire une droite (D_5) qui coupe les trois droites (D_1) (D_2) et (D_3) ?

Discuter.

Peut on construire une droite (D_5) qui coupe (D_1) , (D_2) , (D_3) et (D_4) ?

Exercice 2

On considère deux plans P et Q sécants selon une droite (D). On se propose de construire un triangle ABC dans le plan P, un triangle A'B'C' dans le plan Q, et trois point E, F et G tel que $(AB) \cap (A'B') = \{E\}$, $(AC) \cap (A'C') = \{F\}$ et $(BC) \cap (B'C') = \{G\}$.

Montrer que les points E, F et G sont alignés.

Montrer que les droites (AA') et (BB') sont coplanaires.

Exercice 3

Sur les arêtes $[AE]$, $[BF]$ et $[CG]$ d'un cube ABCDEFGH sont placés trois points I, J ,et K de telle sorte que la droite (IJ) coupe (AB) en L et (EF) en M et la droite (JK) coupe (BC) en N et (FG) en O . Démontrer que les droites (LN) et (MO) sont parallèles .

Exercice 4

Soit ABCDEFGH un cube et J le milieu de l'arête $[EB]$. Soit P un plan parallèle au plan (BEG) et passant par J, coupe $[BF]$ en I et $[FG]$ en K.

- 1- Montrer que les droites (IJ) et (BE) sont parallèles.
- 2- Dédurre que I est le milieu du segment $[BF]$.
- 3- Montrer que K est le milieu du segment $[FG]$.
- 4- Démontrer que les plans (BEG) et (IJK) sont parallèles .

Exercice 5

On considère un pyramide SABCD de sommet S et de base rectangulaire ABCD telle que $SA = SB = SC = SD$. Soit O le le centre du rectangle ABCD.

- 1- Montrer que (OS) est perpendiculaire à (BD)
- 2- Montrer que (OS) est perpendiculaire à (AC)
- 3- En déduire que (OS) est perpendiculaire au plan (ABC) .

Exercice 6

Le polygone de base d'un prisme droit est un losange dont les diagonales ont pour mesures 6 et 8. La hauteur de ce prisme a même mesure que le périmètre de la base .

- 1- Calculer l'aire de la surface latérale .
- 2- Calculer l'aire de la surface totale.
- 3- Calculer le volume de ce prisme.

Exercice 7

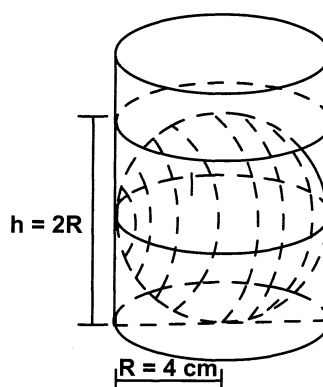
Une pyramide régulière est telle que son apothème a pour longueur 16,13 cm et que sa base est un triangle équilatéral de 10 cm de côté.

- 1- Calculer l'aire de sa surface latérale .
- 2- Calculer l'aire de sa surface totale .
- 3- Calculer son volume .

Exercice 8

Une boîte cylindrique de rayon $R = 4\text{ cm}$. On repose au fond de ce cylindre une boule de même rayon R (comme l'indique la figure ci-contre.) On verse une quantité d'eau dans ce cylindre.

Calculer le volume V occupé par l'eau et la sphère pour couvrir exactement la boule. Déduire le volume d'eau nécessaire pour couvrir exactement la boule.



Exercice 9

Soit un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$. On donne

$AB = AE = 4$ et $AD = 6$, I un point de l'arête $[AB]$ tel que $AI = x$. Soient les points J de $[AD]$ et K de $[AE]$ tels que $AI = AJ = AK$.

1- On se propose d'exprimer en fonction de x le volume V_I du tétraèdre AIJK.

- a- Montrer que le triangle IJK est équilatéral.
- b- Soit N le projeté orthogonal de A sur le plan (IJK) , calculer AN en fonction de x .
- c- Exprimer V_I en fonction de x .

- 2) On coupe le parallélépipède ABCDEFGH par un plan P passant par J et parallèle au plan (CDHG). Que représente la section obtenue.
- 3) M un point quelconque de P. On désigne par O le projeté orthogonal de M sur le plan (CDHG).
 - a- Montrer que le quadrilatère JMOD est un rectangle.
 - b- Exprimer en fonction de x le volume V_2 du pyramide MCDHG.
 - c- Vérifier que $V_1 - V_2 = \frac{(x-4)(x^2+4x+48)}{6}$.
 - d- Est-il possible que le volume du tétraèdre AIJK dépasse celui du pyramide MCDHG.

Exercice 10

On désigne par SABC un tétraèdre tel que les triangles SAB ; SAC et ABC sont rectangles en A . On pose que $AB = AC = 6$ et $AS = 4$ (cm) .

1. Montrer que la droite (SA) est perpendiculaire au plan (ABC)
2. Soit M un point de variable de l'arête [SA] distinct de S et A . Le plan P passant par M et parallèle au plan (ABC) coupe le segment [SB] en N et [SC] en K .
 - a. Représenter la section obtenue et préciser sa nature .
 - b. Montrer que la droite (MS) est perpendiculaire au plan (MNK)
3. On pose $SM = x$
 - a. Exprimer MN en fonction de x .
 - b. On note $V_1(x)$ le volume du tétraèdre SMNK. Vérifier que

$$V_1(x) = \frac{9}{8}x^3$$
4. On désigne par I et J les projetés orthogonaux respectifs des points N et K sur le plan (ABC)
 - a. Montrer que le quadrilatère IJKN est un rectangle .
 - b. Montrer que le solide MNKAIJ est un prisme droit .
 - c. On note $V_2(x)$ le volume de ce prisme. Vérifier que

$$V_2(x) = \frac{9}{8}x^2(4-x) .$$
 - d. Déterminer l'ensemble des points M pour les quelles $V_1(x) \geq V_2(x)$.

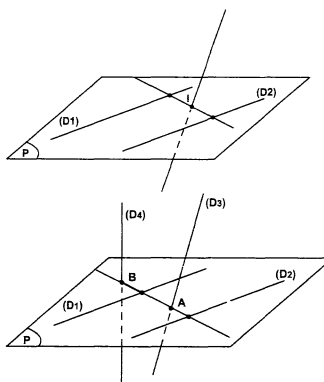
IV. Corrigés des exercices (je maîtrise mes connaissances)

Exercice 1

Les droites (D_1) et (D_2) sont strictement parallèles donc elles déterminent un plan P . Si $(D_3) \subset P$ alors toute droite sécante à (D_3) coupe (D_1) et (D_2) . Si (D_3) est strictement parallèle à P , il n'existe aucune droite qui coupe les trois droites (D_1) , (D_2) et (D_3) . Si (D_3) coupe P en un point I , alors toute droite passant par I , contenue dans P et non parallèle à (D_1) elle coupe (D_1) , (D_2) et (D_3) .

Pour qu'il existe une droite (D_5) qui coupe les quatre droites (D_1) , (D_3) et (D_4) il faut que les droites (D_3) et (D_4) coupent le plan P

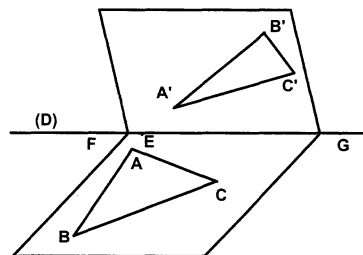
en deux points A et B et que (AB) non parallèle à (D_1) et à (D_2) . Alors La droite (AB) coupe les droites (D_1) , (D_2) , (D_3) et (D_4) .



Exercice 2

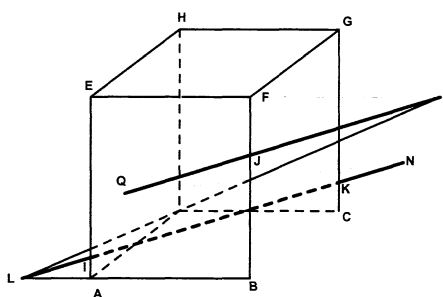
Les droites (AB) et $(A'B')$ se coupent en E donc le point E est un point commun des deux plans P et Q donc de (D) . de même F est le point commun des droites (AC) et $(A'C')$ donc des deux plans P et Q c'est-à-dire de la droite (D) . De la même façon pour G est un point de (D) donc les trois points E , F et G sont alignés.

Puisque les droites (AB) et $(A'B')$ sont sécantes donc les points A , A' , B et B' sont dans un même plan d'où les droites (AA') et (BB') sont coplanaires.



Exercice 3

Les points I , J , K déterminent un plan (P) car la droite (IJ) est dans le plan (AEF) et K , qui n'est pas un point de cette face, n'est pas un point de (IJ) . Le point L est un point de la droite (IJ) droite de (P) , il est donc dans (P) . De même, N , point de (JK) est un point de (P) , ainsi la droite (LN) est une droite de (P) . Elle est de plus une droite du plan (ABC) puisqu'elle contient N , qui



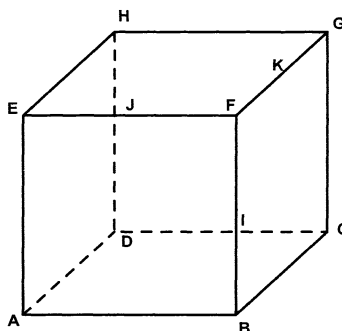
est dans (BC) donc dans le plan (ABC). La droite (LN) est donc commune aux plans (ABC) et (P). De même on démontre que la droite (MO) est commune aux plans (EFG) et (P).
Puisque les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles, leurs intersections avec le plan (P) sont des droites parallèles.
Les droites (LN) et (MO) sont donc des droites parallèles.

Exercice 4

Les points I et J sont deux points du plan P donc la droite (IJ) est parallèle au plan (BEG). Le plan (ABE) contient la droite (IJ) et coupe le plan (BEG) selon la droite (BE) donc $(IJ) \parallel (BE)$.

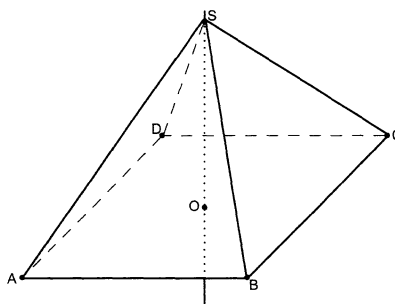
Dans le triangle BEF on a : J est le milieu de [EF] et $(IJ) \parallel (BE)$ donc (IJ) coupe [BF] en son milieu. D'où I est le milieu de [BF]. De la façon que la première question on montre que $(IK) \parallel (BG)$. Dans le triangle FBG, I est le milieu de [BF] et $(IK) \parallel (BG)$ donc le point K est le milieu du segment [FG].

La droite (IJ) parallèle à la droite (BE) du plan (BEG), est parallèle à ce plan. De même la droite (JK) est parallèle à la droite (EG) et donc au plan (BEG). Le plan (IJK) contient deux droites sécantes, (IJ) et (JK), parallèles au plan (BEG). Ce plan (IJK) est donc parallèle au plan (BEG).



Exercice 5

- 1 - Considérons le triangle SBD, comme $SB = SD$, il est isocèle de sommet principal S, or O est le centre du rectangle ABCD donc O est le milieu de la diagonale [BD], donc (SO) est la médiane issue de S du triangle SBD,

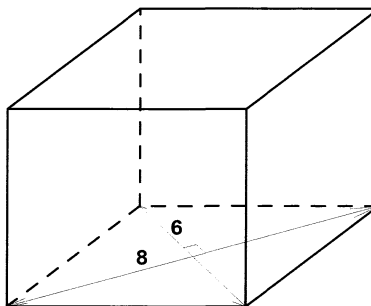


donc (SO) est la hauteur issue de S du triangle SBD d'où (SO) est perpendiculaire à (BD).

- 2 - La même démonstration appliquée au triangle SAC montre que (SO) est perpendiculaire à (AC).
- 3 - La droite (SO) est perpendiculaire à deux droites sécantes (AC) et (BD) du plan (ABCD). Donc la droite (SO) est perpendiculaire au plan ABC.

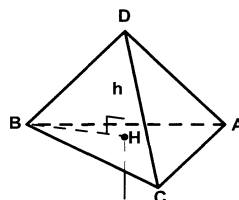
Exercice 6

- Si on désigne par I l'intersection des diagonales de la base, donc le triangle AID est rectangle en I. D'après le théorème de pythagore $AD^2 = AI^2 + ID^2$, donne $AD^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, donc $AD = 5$. Le périmètre de la base est $4 \times 5 = 20$. L'aire de la surface latérale est 400
- L'aire de la base est le produit des longueurs des diagonales soit $8 \times 6 = 48$. donc l'aire de la surface totale est $400 + 2 \times 48 = 496$.
- Le volume d'un prisme droit est le produit de l'aire de la base par la hauteur soit $V = 48 \times 20 = 960$.



Exercice 7

- La pyramide ABCD est régulière donc les faces latérales DBC, DAC et DAB sont des triangles isocèles. On désigne par h' la hauteur de ces triangles donc $h'^2 + 5^2 = (16.13)^2$ d'où $h'^2 = (16.13)^2 - 25$, donc $h' = \sqrt{235,1769}$ et par suite l'aire de la surface latérale est : $S_L = \frac{3 \times 10 \times \sqrt{235,1769}}{2} = 230.032$
- L'aire de la base est l'aire d'un triangle équilatéral de côté 10 soit $S_B = \frac{10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10}{2}$ donne $S_B = 43.3$ donc l'aire de la surface totale est $S = 230.032 + 43.3 = 273,332$
- Il faut calculer d'abord la hauteur h du pyramide. On désigne par H le projeté orthogonale de D sur le plan ABC, H est le centre de gravité du triangle ABC, or $AH = \frac{2}{3} AA'$, (A' est le milieu de $[BC]$) donc $AH = \frac{10\sqrt{3}}{3}$. Le triangle ADH est rectangle en H donc $DH^2 = AD^2 - AH^2$ donne $DH^2 = (16.13)^2 - \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 226,85$ donc $h = 15.06$
Soit $V = \frac{S_B \times h}{3}$ donc $V = \frac{43.3 \times 15.06}{3} = 217.39$



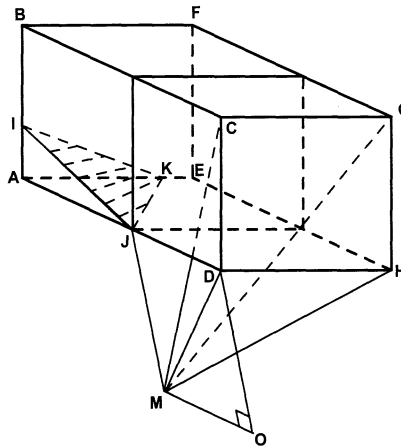
Exercice 8

- 1- On désigne par V_2 le volume de l'eau et de la sphère donc V_2 est le volume d'une partie du cylindre à hauteur $2R$. d'où V_2 est le produit de l'aire de la base par la hauteur $2R$ Soit $V_2 = \pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3 = 128\pi \simeq 401,92 \text{ cm}^3$
- 2- Soit V_1 Le volume de la sphère donc $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 \simeq 267,945 \text{ cm}^3$. donc le volume nécessaire à verser pour couvrir la Sphère est $V = V_2 - V_1$

$$V = 2\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3 \simeq 133,975 \text{ cm}^3.$$

Exercice 9

- 1) a- Les triangles AIJ ; AIK et AJK sont isocèles, rectangles en A donc $IJ = JK = IK = \sqrt{2}x$. donc le triangle IJK est équilatéral.
- b- N le projeté orthogonal de A sur le plan (IJK) donc le triangle AIN est rectangle en N ; si I' est le milieu du segment [IK] On a donc



$$IN = \frac{2}{3}II', \text{ or le triangle } II'K \text{ est}$$

rectangle en I' d'où $II'^2 = IK^2 - I'K^2$ On trouve donc $II' = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x$. On applique

le théorème de pythagore dans le triangle AIN rectangle en N,

on obtient $AN^2 = AI^2 - IN^2$

$$\text{donc } AN = \frac{\sqrt{3}}{3}x.$$

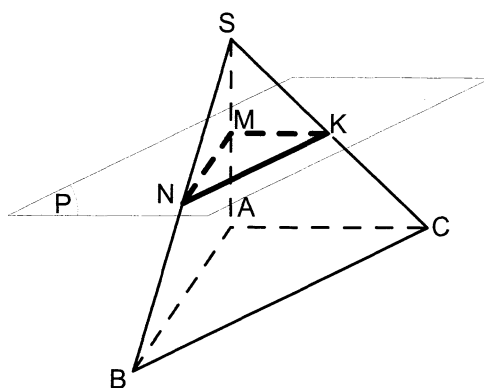
c- Le Volume du tétraèdre AIJK est $V_1 = \frac{S_{(IJK)} \cdot AN}{3}$ avec $S_{(IJK)}$ est l'aire du

$$\text{triangle (IJK) , on trouve } S_{(IJK)} = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2. \text{ donc } V_1 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}x}{3} = \frac{x^3}{6}.$$

- 2- La section du parallélépipède ABCDEFGH par P est un carré de côté isométrique au carré AEFB.
- 3- a- Les cotés [JM] et [OD] sont situés dans deux plans parallèles et puisque (JD) et (MO) sont perpendiculaires au plan (CDHG) donc elles sont perpendiculaires à (OD) ce qui donne que JMOD est un rectangle.
- b- Le volume V_2 du pyramide MCDHG est le tiers du produit de l'aire de la base (CDHG) par MO donc $V_2 = \frac{S_{(CDHG)} \cdot OM}{3} = \frac{16 \cdot (6-x)}{3}$.
- c- $V_1 - V_2 = \frac{1}{6}x^3 - \frac{16 \cdot (6-x)}{3} = \frac{x^3 - 32(6-x)}{6} = \frac{x^3 + 32x - 192}{6}$.
- Le développement de $\frac{(x-4)(x^2+4x+48)}{6}$ Donne
- $$V_1 - V_2 = \frac{(x-4)(x^2+4x+48)}{6}.$$
- d- puisque $x \leq 4$ et $x^2 + 4x + 48 = (x+2)^2 + 44$ donc $V_1 - V_2 \geq 0$.
On déduit alors que le volume du tétraèdre AIJK ne peut pas dépasser le volume du pyramide mais il peut être égal pour $x = 4$

Exercice 10

- les triangles SAB et SAC sont rectangles en A donc les droites (SA) et (AB) sont perpendiculaires ainsi que (SA) et (AC), or les droites (AB) et (AC) sont contenues dans le plan (ABC) d'où la droite (SA) est perpendiculaire au plan (ABC).
- La section plane du tétraèdre par le plan P est le triangle MNK (figure ci-contre).



Les deux plans P et (ABC) sont parallèles donc la droite (AB) est parallèle au plan P. Le plan (ABS) contient la droite (AB) et coupe le plan P selon la

droite (MN) donc les droites (AB) et (MN) sont parallèles. De la même manière on démontre que les droites (MK) et (AC) sont parallèles. En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle SAB on aura :

$$\frac{SM}{SA} = \frac{MN}{AB} \quad (1).$$

De même dans le triangle SAC on aura : $\frac{SM}{SA} = \frac{MK}{AC} \quad (2).$

D'après (1) et (2) on obtient $\frac{MN}{AB} = \frac{MK}{AC}$, or $AB = AC$ donc $MN = MK$ d'où

le triangle MNK est isocèle en M. D'autre part on a : La droite (AB) est perpendiculaire commune aux deux droites (AS) et (AC) et puisque (AS) et (AC) sont contenues dans le plan (ASC) donc la droite (AB) est perpendiculaire au plan (ASC). Les droites (AB) et (MN) sont parallèles alors (MN) est perpendiculaire au plan (ASC). La droite (MK) est contenue dans le plan (ASC) alors les droites (MK) et (MN) sont perpendiculaires, et par suite le triangle MNK est rectangle et isocèle en M.

b. Les droites (SA) et (SM) sont confondues. D'après la question 1. (SA) est perpendiculaire au plan (ABC). Le plan (ABC) est parallèle au plan (MNK) donc (SA) est perpendiculaire au plan (MNK) et par suite la droite (SM) est perpendiculaire au plan (MNK).

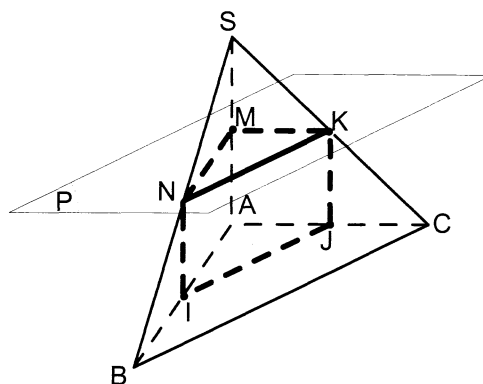
3. a. En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle ASB on aura :

$$\frac{SM}{SA} = \frac{MN}{AB} \text{ équivaut à } MN = \frac{SM \times AB}{SA} = \frac{3}{2}x.$$

b. L'aire ψ de la base MNK est $\psi = \frac{KM \times MN}{2} = \frac{\left(\frac{3}{2}x\right)^2}{2} = \frac{9}{8}x^2$. Le volume

$$\text{est } V_1(x) = \frac{9}{8}x^2 \cdot x = \frac{9}{8}x^3.$$

4. a. Les droites (KJ) et (NI) sont perpendiculaires au plan (ABC) donc elles sont parallèles d'où les points I, N, K et J sont sur un même plan. La droite (NK) est contenue dans un plan parallèle au plan (ABC) donc elle est parallèle à ce plan. Le plan (INK) contient la droite (NK) et coupe le plan (ABC) selon la droite (IJ) donc les droites (NK) et (IJ) sont parallèles.



D'après ce qui précède on a : Les côtés opposés du quadrilatère INKJ sont parallèles donc INKJ est un parallélogramme. On a encore la droite (KJ) est perpendiculaire au plan (ABC) et la droite (IJ) est contenue dans le plan (ABC) donc les droites (KJ) et (IJ) sont perpendiculaires, d'où le triangle IJKN est un rectangle.

b. De la même manière on démontre que les quadrilatères (MKJA) et (MNIA) sont des rectangles donc MNKAIJ est un prisme droit.

c. Le volume du prisme est $V_2(x) = \psi(MNK) \times MA = \frac{9}{8}x^2(4-x)$.

d. $V_1(x) \geq V_2(x)$ équivaut à $\frac{9}{8}x^3 \geq \frac{9}{8}x^2(4-x)$ équivaut à $x \geq 4-x$ équivaut à

$x \geq 2$ donc puisque M est un point du segment [SA] privé des points S et A alors $x \in [2, 4[$. Si on désigne par H le milieu du segment [AS] alors le point M décrit le segment [AH] privé du point A.

Devoir de synthèse N° 3 – 1

Exercice 1

1. Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} 2a + b - 3 = 0 \\ a - b = -1 \end{cases}$$
2. Soit la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$. Déterminer a et b sachant que 2 est l'antécédent de 3 par f , et la courbe de f passe par le point $A(-1, 1)$.
3. Tracer la courbe (C_f) de la fonction f .
4. Résoudre dans \mathbb{R}^2 le système (S) :
$$\begin{cases} 2x - 4y = 12 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$$
5. déduire alors les solution du système (S') :
$$\begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{4}{y} = 12 \\ \frac{1}{x} + \frac{3}{y} = 8 \end{cases}$$

Exercice 2

Résoudre dans \mathbb{R}

1. $\frac{2x-3}{2} + \frac{x-1}{4} \leq 2$
2. $(x-3)(-4x+4) \geq 0$
3. $(x-3)(x-2)^2 \geq x^3 - 3x^2$

Exercice 3

On pose $A(x) = x^2 - 6x - 16$

1. Vérifier que $A(x) = (x-3)^2 - 25$ puis factoriser $A(x)$.
2. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $A(x) < 0$

Exercice 4

On pose $B(x) = |x-2| + 3|x+2| + x - 3$

- a) Ecrire $B(x)$ sans le symbole de la valeur absolue
- b) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $B(x) = 0$.
- c) Résoudre dans $[-2, 2]$ l'inéquation : $B(x) < 0$.

Exercice 5

Soit ABCD un tétraèdre tel que les faces ABC, ACD, ADB sont des triangles rectangles en A et isocèles. On désigne par E un point de [BC] distincts de B et C.

1. Montrer que les droites (AD) et (BC) sont orthogonales.
2. On désigne par I le milieu du segment [BC]. Montrer que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (AID).
3. Soit P le plan perpendiculaire à (BC) en E.
 - a. Montrer que les plans (AID) et P sont parallèles.
 - b. Construire la section du tétraèdre par le plan P.
4. On pose $AB = a$ et $BE = k \cdot BC$.
 - a. Calculer le volume V du tétraèdre en fonction de a .
 - b. On coupe le tétraèdre suivant le plan (P) , réalisant ainsi deux solides . Déterminer en fonction de a et k le volume de chacun des deux solides.

Devoir de synthèse N° 3 – 2

Exercice 1

Soit la fonction f définie par $f(x) = ax + b$.

1. On suppose que la représentation graphique (C) dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) de f passe par les points $A(-1, 2)$ et $B(1, 3)$. Déterminer alors les réels a et b .

2. On prend $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{5}{2}$. Compléter le tableau suivant :

x	1			-4
$f(x)$		-3	5	

3. Tracer la courbe représentative de f
4. Soit la fonction affine g définie par $g(x) = a'x + b'$.
 - a. Déterminer b' pour que pour tous réels x_1 et x_2 on a :
 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.
 - b. Calculer alors a' sachant que les deux courbes (C_f) et (C'_g) de g se rencontrent en A .
 - c. Tracer alors la courbe (C'_g) .

Exercice 2

On a relevé les distances du domicile au lycée pour 500 élèves.

Distance (en km)	$[0, 1[$	$[1, 2[$	$[2, 5[$	$[5, 10[$	$[10, 20[$	$[20, 50[$
Effectifs	30	141	78	217	10	24

1. Calculer les fréquences de chaque classe puis les fréquences cumulées croissantes.
2. Calculer la moyenne \bar{x} et l'écart type σ de cette série statistique.
3. Tracer la courbe des fréquences cumulées croissantes.
4. Utiliser cette courbe pour déterminer une valeur approchée de la médiane de cette série.

Exercice 3

Soient les points C et D d'une droite graduée Δ muni d'un repère cartésien

(A, \overrightarrow{AB}) d'abscisses respectives -3 et $\frac{1}{2}$

1. Déterminer l'abscisse x du point M de Δ telle que :

$$3\overline{CM} - 2\overline{MD} = 4\overline{CD}$$
2. déterminer l'abscisse du point A selon le repère (C, \overline{CD})
3. Soit le point E de Δ défini par $\overrightarrow{EA} = \frac{4}{3}\overrightarrow{EB}$, déterminer l'abscisse de E
 selon le repère (C, \overrightarrow{CD})

Exercice 4

On considère un triangle isocèle de sommet principal C tel que $\widehat{BCA} = 30^\circ$.

1. Construire les points B' et C' images respectifs des points B et C par le quart de tour direct de centre A .
2. Calculer $\widehat{B'AC'}$.
3. Montrer que les triangles ABC et $AB'C'$ sont isométriques.
4. Dédire de ce qui précède que $BC = B'C'$.
5. Soit H l'orthocentre du triangle ABC et H' image de H par le quart de tour direct de centre A . Montrer que (AH') est perpendiculaire à $(B'C')$.
6. Dédire que H' est l'orthocentre du triangle $AB'C'$.

Corrigé du devoir de synthèse N° 3 – 1

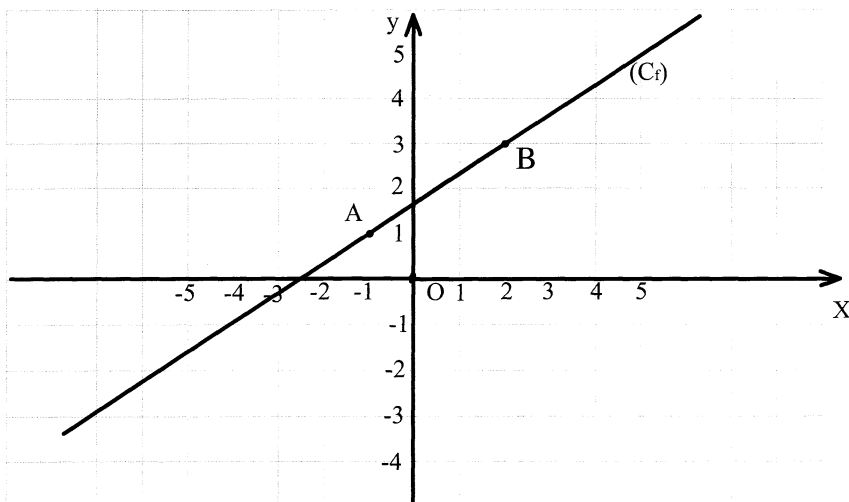
Exercice 1

1. $\begin{cases} 2a+b-3=0 \\ a-b=-1 \end{cases}$ Par addition membre à membre $\begin{cases} 3a=2 \\ a-b=-1 \end{cases}$

équivalent à $\begin{cases} a=\frac{2}{3} \\ b=a+1 \end{cases}$ équivalent à $\begin{cases} a=\frac{2}{3} \\ b=\frac{5}{3} \end{cases}$ donc $S_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3} \right) \right\}$

2. 2 est l'antécédent de 3 par f donne $f(2) = 3$ donc $2a + b = 3$
et on a : le point $A(-1,1)$ appartient à la courbe (C_f) donc $f(-1) = 1$
d'où $-a + b = 1$ alors $a - b = -1$. a et b sont les solutions du système de la question 1. et par suite $a = \frac{2}{3}$ et $b = \frac{5}{3}$.

3. d'après la question 2. on aura $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$. La courbe (C_f) est une droite qui passe par $A(-1,1)$ et par $B(2,3)$.



1. Résoudre dans \mathbb{R}^2 le système (S) :

$$\begin{cases} 2x - 4y = 12 \\ x + 3y = 8 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 2x - 4y = 12 \\ -2x - 6y = -16 \end{cases}$$

Par addition membre à membre on a :

$$\begin{cases} 2x - 4y = 12 \\ -10y = -4 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 2x = 4y + 12 \\ y = \frac{2}{5} \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x = 2y + 6 \\ y = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} x = \frac{4}{5} + 6 \\ y = \frac{2}{5} \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x = \frac{34}{5} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases} \text{ donc } S_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \left(\frac{34}{5}, \frac{2}{5} \right) \right\}$$

5. Déduire alors les solutions du système (S') :

$$\begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{4}{y} = 12 \\ \frac{1}{x} + \frac{3}{y} = 8 \end{cases}$$

Si on change $X = \frac{1}{x}$ et $Y = \frac{1}{y}$ le système (S') se ramène à

$$\begin{cases} 2X - 4Y = 12 \\ X + 3Y = 8 \end{cases} \text{ et d'après 1) on a : } \frac{1}{x} = \frac{34}{5} \text{ et } \frac{1}{y} = \frac{2}{5} \text{ donc}$$

$$x = \frac{5}{34} \text{ et } y = \frac{5}{2} \text{ d'où } S_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \left(\frac{5}{34}, \frac{5}{2} \right) \right\}.$$

Exercice 2

1. $\frac{2x-3}{2} + \frac{x-1}{4} \leq 2$ équivaut à $2(2x-3) + (x-1) \leq 8$ équivaut à

$$4x - 6 + x - 1 - 8 \leq 0 \text{ équivaut à } 5x \leq 15 \text{ équivaut à } x \leq \frac{15}{5} \Leftrightarrow x \leq 3$$

$$\text{donc } S_{\mathbb{R}} =]-\infty, 3].$$

2. $(x-3)(-4x+4) \geq 0$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$x - 3$	-	-	0	+	
$-4x + 4$	+	0	-	-	
$(x - 3)(4 - 4x)$	-	0	+	0	-

$$\text{Donc } S_{\mathbb{R}} = [1, 3].$$

3. $(x-3)(x-2)^2 \geq x^3 - 3x^2$ équivaut à $(x-3)(x-2)^2 - x^2(x-3) \geq 0$

$$\text{équivaut à } (x-3)[(x-2)^2 - x^2] \geq 0 \text{ équivaut à } (x-3)[x^2 - 4x + 4 - x^2] \geq 0$$

$$\text{équivaut à } (x-3)(-4x+4) \geq 0 \text{ donc } S_{\mathbb{R}} = [1, 3].$$

Exercice 3

1.

$A(x) = x^2 - 6x - 16$ équivaut à

$A(x) = [x^2 - 6x + 9] - 25$ équivaut à

$A(x) = (x - 3)^2 - 25$ équivaut à

$A(x) = (x - 3)^2 - 5^2$ équivaut à

$A(x) = (x - 3 - 5)(x - 3 + 5)$

$= (x - 8)(x + 2).$

2.

x	$-\infty$	-2	8	$+\infty$	
$x - 8$	-	-	0	+	
$x + 2$	-	0	+	+	
$(x - 8)(x + 2)$	+	0	-	0	+

$A(x) < 0$ signifie $x \in]-2, 8[$

donc $S_{\mathbb{R}} =]-2, 8[$

Exercice 4

$B(x) = |x - 2| + 3|x + 2| + x - 3$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x - 2$	-	-	0	+
$ x - 2 $	$-x + 2$	$-x + 2$	0	$x - 2$
$x + 2$	-	0	+	+
$ x + 2 $	$-x - 2$	0	$x + 2$	$x + 2$
$x + 2$	$-3x - 7$	$3x + 5$	$5x + 1$	

b) • Sur $]-\infty, -2]$: $B(x) = -3x - 7 = 0$ signifie $x = -\frac{7}{3}$, $S_1 = \left\{-\frac{7}{3}\right\}$

• Sur $[-2, 2]$: $B(x) = 3x + 5 = 0$ signifie $x = -\frac{5}{3}$, $S_2 = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$

• Sur $[2, +\infty]$: $B(x) = 5x + 1 = 0$ signifie $x = -\frac{1}{5}$, $S_3 = \emptyset$

donc $S_{\mathbb{R}} = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}\right\}$.

c) Sur $[-2, 2]$:

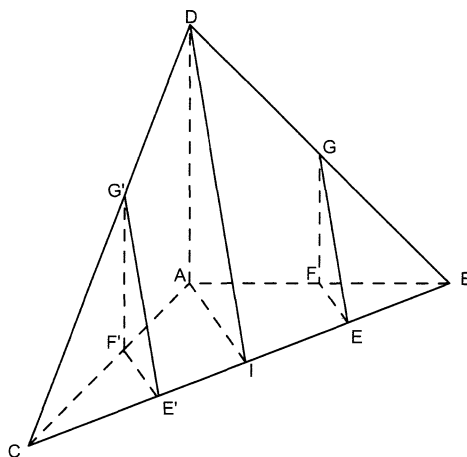
$B(x) = 3x + 5 < 0$ signifie $3x < -5$ signifie $x < -\frac{5}{3}$

$S_{[-2, 2]} = \left[-2, -\frac{5}{3}\right[$

Exercice 5

1. Les faces ABC , ACD , et ADB sont des triangles rectangle en A donc

$$\begin{cases} (AD) \perp (AB) \\ (AD) \perp (AC) \end{cases}$$
 d'où la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC) et par suite les droites (AD) et (BC) sont orthogonales.
2. Le triangle ABC est isocèle en A , I milieu du segment $[BC]$ donc les droites (AI) et (BC) sont perpendiculaires et d'après la question précédente (AD) orthogonales à (BC) donc la droite (BC) est orthogonales à deux droites sécantes (AD) et (AI) du plan (AID) donc la droite (BC) est perpendiculaire au plan (AID) .
3. a. Les deux plans (AID) et P sont perpendiculaires à une même droites (BC) donc ils sont parallèles.
- b. On distingue deux cas : $E \in [IB]$ ou $E \in [IC]$.
 Si $E \in [IB]$ Le plan P coupe (AB) en F et (DB) en G tel que $(AI) \parallel (EF)$ et $(AD) \parallel (FG)$ (deux plans parallèles tout plan coupe l'un, il coupe l'autre et leurs intersections sont parallèles).
 Si $E \in [IC]$ on raisonne de la même façon.



4. a. L'aire de la base ABC est $B = \frac{a^2}{2}$ donc le volume $V = \frac{B \times h}{3} = \frac{a^3}{6}$
- b. Il faut calculer d'abord l'aire de la base (BEF), on a : ABC triangle rectangle en A donc $BC = \sqrt{2} \times a$. Le triangle AIB est rectangle en I donc $AI^2 = AB^2 - BI^2 = \frac{a^2}{2}$ donc $AI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. d'autre part on a : dans le triangle BAI (EF) // (AI) donc $\frac{BE}{BI} = \frac{EF}{AI}$ donne $\frac{k \cdot 2 \cdot BI}{BI} = \frac{EF}{\frac{\sqrt{2}}{2} a}$ d'où $EF = \sqrt{2} \cdot k \cdot a$ donc le triangle EBF est isocèle rectangle en E donc l'aire de la base du tétraèdre ECFG est $B_1 = \frac{(\sqrt{2} \cdot k \cdot a)^2}{2} = k^2 a^2$ donc le volume du tétraèdre ECFG et $V_1 = \frac{B_1 \cdot h_1}{3} = \frac{k^2 \cdot a^2 \cdot FG}{3}$. Il faut calculer donc FG, On applique le théorème de Thalès dans le triangle AIB on aura : $\frac{BE}{BI} = \frac{BF}{BA}$ donne $\frac{k \cdot 2 \cdot BI}{BI} = \frac{BF}{a}$ donc $BF = 2k \cdot a$, et dans le triangle ABD on aura : $\frac{BF}{BA} = \frac{GF}{DA}$ donne $\frac{2k \cdot a}{a} = \frac{GF}{a}$ donc $GF = 2k \cdot a$. Et par suite $V_1 = \frac{B_1 \cdot h_1}{3} = \frac{k^2 \cdot a^2 \cdot 2ka}{3} = \frac{2}{3} (a^3 \times k^3)$.
- Le volume du tronc du tétraèdre ACEFGD est $V' = V - V_1$ donc $V' = \frac{a^3}{6} - \frac{2}{3} (a^3 \times k^3) = \frac{a^3 - 4a^3 \cdot k^3}{6}$

Corrigé du devoir de synthèse N° 3 - 2

Exercice 1

Soit la fonction f définie par $f(x) = ax + b$.

- On suppose que la représentation graphique (C) dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) de f passe par les points $A(-1, 2)$ et $B(1, 3)$ donc $f(-1) = 2$ et $f(1) = 3$ d'où $-a + b = 2$ et $a + b = 3$ ce qui donne que a et b sont les solutions du système :

$$\begin{cases} -a + b = 2 \\ a + b = 3 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 2b = 5 \\ a = 3 - b \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ et par suite}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

- On pose que $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{5}{2}$. D'après 1. on a $f(1) = 3$.

Si x est l'antécédent de -3 alors $f(x) = -3$ donc

$$\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} = -3 \text{ équivaut à } \frac{1}{2}x = -5 - \frac{5}{2} = -\frac{15}{2} \text{ donc } x = -15$$

$$f(-4) = \frac{1}{2}(-4) + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

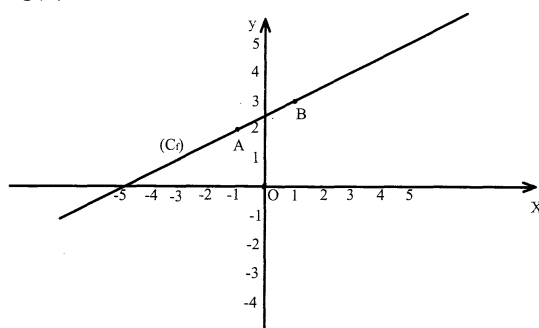
x	1	-11	5	-4
$f(x)$	3	-3	5	$\frac{1}{2}$

- La courbe représentative de f est une droite passant par $A(-1, 2)$ et par le point $B(1, 3)$.

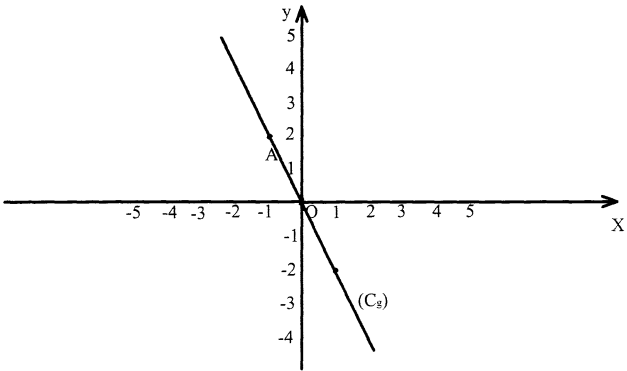
- Soit la fonction affine g définie par $g(x) = a'x + b'$.

- Pour que pour tous réels x_1 et x_2 on a : $g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2)$ donc $(x_1 + x_2)a' + b' = a'x_1 + b' + a'x_2 + b'$ donne $b' = 2b'$ donc $b' = 0$ c'est-à-dire que g est une fonction linéaire.

- Les deux courbe (C_f) et (C'_g) de g se rencontrent en A . donc $g(-1) = 2$ d'où $-a' = 2$ donc $a' = -2$ d'où $g(x) = -2x$



- f. La courbe (C_g) est une droite linéaire qui passe par l'origine du repère et par le point $A(-1,2)$.



Exercice 2

On a relevé les distances du domicile au lycée pour 500 élèves .

Distance (en km)	[0,1[[1,2[[2,5[[5,10[[10,20[[20,50[
Effectifs	30	141	78	217	10	24

1. L'effectif total N est 500 . Les fréquences f_i sont données par la formule $f_i = \frac{n_i}{N}$. Et les fréquences cumulés croissants sont données par la formule $F_i^{\nearrow} = \sum_{k \leq i} F_k$ les résultats sont dans le tableau suivant :

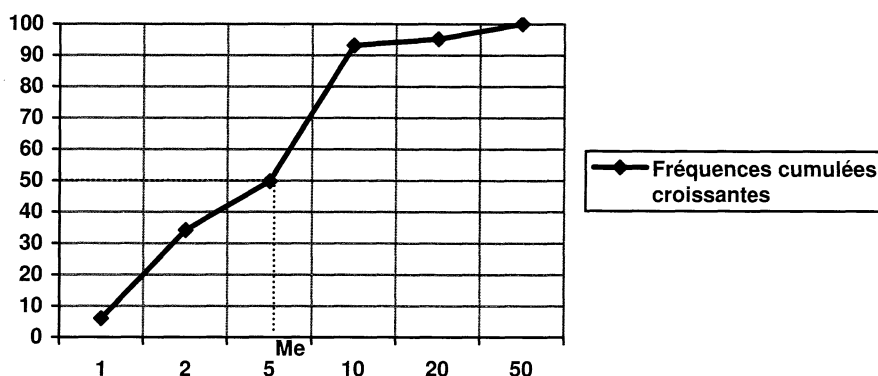
Distance (en km)	[0,1[[1,2[[2,5[[5,10[[10,20[[20,50[
Effectifs	30	141	78	217	10	24
f_i	0.06	0,282	0,156	0,434	0,02	0,048
F_i^{\nearrow}	0.06	0,342	0,498	0,932	0,952	1

2. La moyenne $\bar{x} = \frac{\sum n_i \times x_i}{N}$; la variance est $V = \frac{\sum X_i^2 n_i}{N} - \bar{X}^2$ et en fin l'écart type $\sigma = \sqrt{V}$. Il faut d'abord chercher les centres x_i des classes puis les produits $x_i.n_i$ on aura donc le tableau suivant :

Distance (en km)	0.5	1.5	3.5	7.5	15	35
Effectifs	30	141	78	217	10	24
$n_i.x_i$	15	211,5	273	1627,5	150	840
$n_i.x_i^2$	7,5	317,25	955,5	12206,25	2250	29400

Donc la moyenne $\bar{x} = 6,234$; la variance $V = 90,273 - 38,862 = 51,41$ d'où l'écart type $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{51,41}$

3.



4. Graphiquement : $Me \approx 5$

Exercice 3

Soient les points C et D d'une droite graduée Δ muni d'un repère cartésien

(A, \overline{AB}) d'abscisses respectives -3 et $\frac{1}{2}$

1. Soit x l'abscisse du point M de Δ telle que :

$$3\overline{CM} - 2\overline{MD} = 4\overline{CD} \text{ équivaut à } 3\left(x + 3\right) - 2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2} + 3\right)$$

$$\text{équivaut à } x + 10 = 14 \text{ équivaut à } x = 4$$

2. Si x est l'abscisse du point A selon le repère (C, \overline{CD}) alors

$$\overline{CA} = x\overline{CD} \text{ équivaut à } (0 - (-3)) = x\left(\frac{1}{2} - (-3)\right) \text{ équivaut à } \frac{7}{2}x = 3$$

$$\text{équivaut à } x = \frac{6}{7}$$

3. Soit le point E de Δ défini par $\overline{EA} = \frac{4}{3}\overline{EB}$. On commence par chercher

l'abscisse du point E selon le repère (A, \overline{AB}). De la relation $\overline{EA} = \frac{4}{3}\overline{EB}$

on déduit que

$$\overline{EA} = \frac{4}{3}\overline{EA} + \frac{4}{3}\overline{AB} \text{ équivaut à } -\frac{1}{3}\overline{EA} = \frac{4}{3}\overline{AB} \text{ équivaut à } \overline{AE} = 4\overline{AB}. \text{ Si}$$

on désigne par x l'abscisse du point E selon le repère (C, \overline{CD}) alors

$$\overline{CE} = x\overline{CD} \text{ équivaut à } (4 + 3) = x\left(\frac{1}{2} + 3\right) \Leftrightarrow 7 = \frac{7}{2}x \text{ équivaut à } x = 2.$$

Exercice 4

On considère un triangle isocèle de sommet principal C tel que $\widehat{BCA} = 30^\circ$.

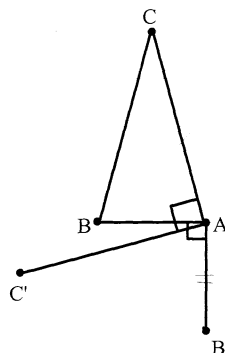
1. Les points B' et C' sont images respectives des points B et C par le quart de tour direct de centre A donc

$$\begin{cases} AB = AB' \\ \widehat{BAB'} = 90^\circ \end{cases} \text{ et } \begin{cases} AC = AC' \\ \widehat{CAC'} = 90^\circ \end{cases}$$

2. On a : $\widehat{CAC'} = \widehat{BAB'} = 90^\circ$ donc

$$\widehat{CAB} + \widehat{BAC'} = \widehat{BAC'} + \widehat{C'AB} \text{ donne}$$

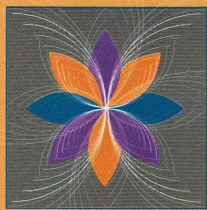
$$\widehat{CAB} = \widehat{C'AB} \text{ or } \widehat{CAB} = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$$



3. Les deux triangles ABC et AB'C' sont rectangles en A qui ont des côtés [AB] et [AC] respectivement isométriques aux côtés [AB'] et [AC'] adjacents à l'angle droit donc les deux triangles ABC et AB'C' sont isométriques.
4. les côtés [BC] et [B'C'] sont homologues donc ils sont isométriques
5. H l'orthocentre du triangle ABC et H' image de H par le quart de tour direct de centre A. Les images de deux droites perpendiculaires par un quart de tour sont deux droites perpendiculaires. Puisque (AH') est l'image de (AH) et (B'C') est l'image de (BC) donc les droites (AH') et (B'C') sont perpendiculaires.
6. De la même façon on déduit que (B'H') est perpendiculaire à (AC') donc H' est l'orthocentre du triangle AB'C'.

SOMMAIRE

1. Les angles.....	5
2. Activités numériques I.....	21
3. Théorème de Thalès et sa réciproque.....	34
4. Activités numériques II.....	48
5. Exemples de deux devoirs de contrôle N°1.....	65
6. Rapports trigonométriques d'un angle aigu - Relations métriques dans le triangle rectangle.....	70
7. Activités algébriques	88
8. Exemples de deux devoirs de synthèse N° 1.....	99
9. Equation et Inéquations du premier degré à une inconnue	105
10. Fonction linéaires.....	120
11. Fonctions affines.....	132
12. Vecteurs et Translations.....	147
13. Exemples de deux devoirs de contrôle N° 2.....	161
14. Somme de deux vecteurs - Vecteurs colinéaires.....	168
15. Exemples de deux devoirs de synthèse N°2.....	182
16. Activités dans un repère	190
17. Système de deux équations à une inconnues	202
18. Exemples de deux devoirs de contrôle N° 3.....	215
19. Quart de tour	224
20. Exploitation de l'information.....	236
21. Sections planes d'un solide	255
22. Exemples de deux devoirs de synthèses N°3.....	275



xy₁

**LES MATHÉMATIQUES
EN 1^{ère} ANNÉE SECONDAIRE**



PRIX: 7.000 DT

MOHAMED ALI EDITIONS



9 789973 331090